



多旋翼飞行器设计与控制

第九讲 多旋翼的运动信息估计

全权 副教授

qq_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学

2016年5月5日 北航主南401



北航可靠飞行控制研究组

BUAA Reliable Flight Control Group



前言

东方哲理： 中国人早就认识到信息融合的重要性。 《管子·君臣上》中说：“夫民别而听之则愚，合而听之则圣。” 《孙子·谋攻篇》中说：“知己知彼，百战不殆；不知彼而知己，一胜一负；不知彼，不知己，每战必殆。” 意思是说，在军事纷争中，既了解敌人，又了解自己，百战都不会有危险；不了解敌人而只了解自己，胜败的可能性各半；既不了解敌人，又不了解自己，那只有每战都有危险。《资治通鉴·唐太宗贞观二年》中说：“上（唐太宗）问魏徵曰：‘人主何为而明，何为而暗？’对曰：‘兼听则明，偏信则暗。’” 中国成语“兼听则明，偏信则暗”。意谓多方面听取意见，才能明辨是非，单听信某方面的话，就愚昧不明。明代许仲琳《封神演义·第五十三回》中说：“为将之道：身临战场，务要眼观四处，耳听八方。”



前言

如何根据多旋翼机体上携带的传感器，
准确估计多旋翼的运动信息？



大纲

1. 姿态估计
2. 位置估计
3. 速度估计
4. 障碍估计
5. APM自驾仪浅析
6. 总结
7. 作业



1. 姿态估计

□ 测量原理

(1) 俯仰角和滚转角测量原理

因为 ${}^b\mathbf{a} = {}^b\dot{\mathbf{v}}$ ，所以根据第六章建模可知

$${}^b\mathbf{a} = \begin{bmatrix} v_{y_b} \omega_{z_b} - v_{z_b} \omega_{y_b} - g \sin \theta \\ v_{z_b} \omega_{x_b} - v_{x_b} \omega_{z_b} + g \cos \theta \sin \phi \\ v_{x_b} \omega_{y_b} - v_{y_b} \omega_{x_b} + g \cos \theta \cos \phi - \frac{f}{m} \end{bmatrix}$$

飞行器只受重力G和螺旋桨拉力f，其中螺旋桨拉力沿z_b轴向下方向，因此在x_b和y_b轴方向上没有分量！

其中 ${}^b\mathbf{a} = [a_{x_b} \quad a_{y_b} \quad a_{z_b}]^T$ ， $f \in \mathbb{R}_+$ 。当角速度很小的情况下可以近似认为

$$a_{x_b} \approx -g \sin \theta$$

$$a_{y_b} \approx g \cos \theta \sin \phi$$



1. 姿态估计

□ 测量原理

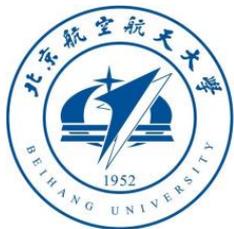
(1) 俯仰角和滚转角测量原理

因此，**低频**的俯仰角和滚转角信号观测量可以由加速度计读数近似获得，表示如下

$$\theta_m = -\arcsin\left(\frac{{}^b a_{xm}}{g}\right)$$
$$\phi_m = \arcsin\left(\frac{{}^b a_{ym}}{g \cos \theta_m}\right)$$

其中 ${}^b \mathbf{a}_m = [a_{x_b m} \quad a_{y_b m} \quad a_{z_b m}]^T$ 表示加速度计的测量值。

注：如果**机体振动很大**，那么 $a_{x_b m}, a_{y_b m}$ 将被噪声**严重污染**。这样得到的角度 θ_m, ϕ_m 就不准确了。因此，机体的**减振**很重要。



1. 姿态估计

□ 测量原理

(2) 偏航角测量原理

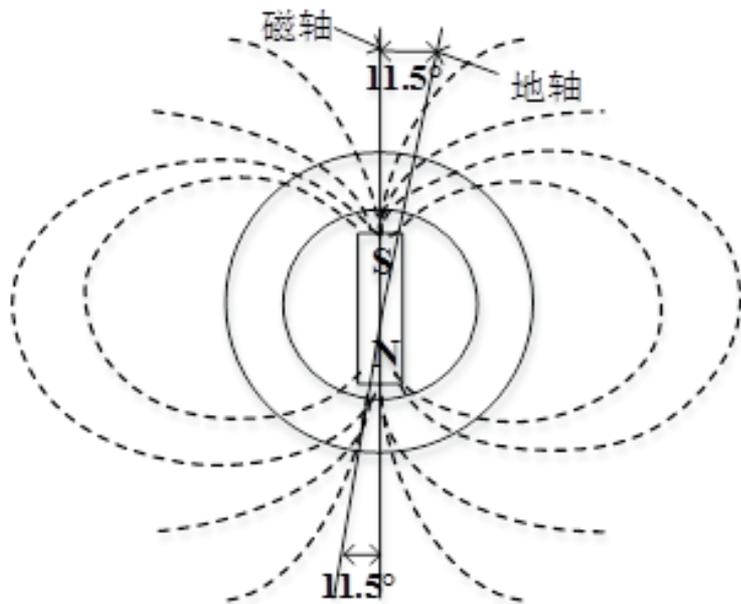


图. 地球磁场示意图

磁轴和地轴不是重合的。磁场在地球表面的水平投影**不是严格指向地轴**。**磁偏角**是磁场强度矢量的水平投影与正北方向之间的夹角，即磁子午线与地理子午线之间的夹角。如果磁场强度矢量的指向偏向正北方向以东称**东偏**，偏向正北方向以西称**西偏**。各个地方的磁偏角不同，而且由于磁极也处在运动之中，某一地点磁偏角会随时间而改变。因此，要精确找到北方，需要经过两步。



1. 姿态估计

□ 测量原理

(2) 偏航角测量原理

1) 第一步，确定磁场方向在水平面的向量，求出方位角。

磁力计的读数为 $\mathbf{m}_m = [m_x \quad m_y \quad m_z]^T$ 。因为磁力计很可能不是水平放置，所以需要倾角传感器测量的角度 (θ_m, ϕ_m) 将磁力计的测量值投影到水平面上。因此，先做如下变换[1]

$$\bar{m}_x = m_x \cos \theta_m + m_y \sin \phi_m \sin \theta_m + m_z \cos \phi_m \sin \theta_m$$

$$\bar{m}_y = m_y \cos \phi_m - m_z \sin \phi_m$$

其中 \bar{m}_x, \bar{m}_y 表示磁力计的读数在水平面的投影。

[1] Caruso M J. Applications of magnetoresistive sensors in navigation systems[R]. SAE Technical Paper, 1997.



1. 姿态估计

□ 测量原理

(2) 偏航角测量原理

1) 第一步，确定磁场方向在水平面的向量，求出方位角。

定义 $\psi_{\text{mag}} \in [0, 2\pi]$ ，那么可以表示为： | 定义 $\psi_{\text{mag}} \in [-\pi, \pi]$ ，那么可以表示为：

$$\psi_{\text{mag}} = \begin{cases} \pi - \tan^{-1}(\bar{m}_y / \bar{m}_x) & \text{if } \bar{m}_x < 0, \\ 2\pi - \tan^{-1}(\bar{m}_y / \bar{m}_x) & \text{if } \bar{m}_x > 0, \bar{m}_y > 0, \\ -\tan^{-1}(\bar{m}_y / \bar{m}_x) & \text{if } \bar{m}_x > 0, \bar{m}_y < 0, \\ \pi/2 & \text{if } \bar{m}_x = 0, \bar{m}_y < 0, \\ 3\pi/2 & \text{if } \bar{m}_x = 0, \bar{m}_y > 0, \end{cases}$$

$$\psi_{\text{mag}} = \arctan 2(\bar{m}_y, \bar{m}_x)$$

机头顺时针方向转动，偏航角为正。



1. 姿态估计

□ 测量原理

(2) 偏航角测量原理

2) 第二步，加上或减去磁偏角修正到正北方向。

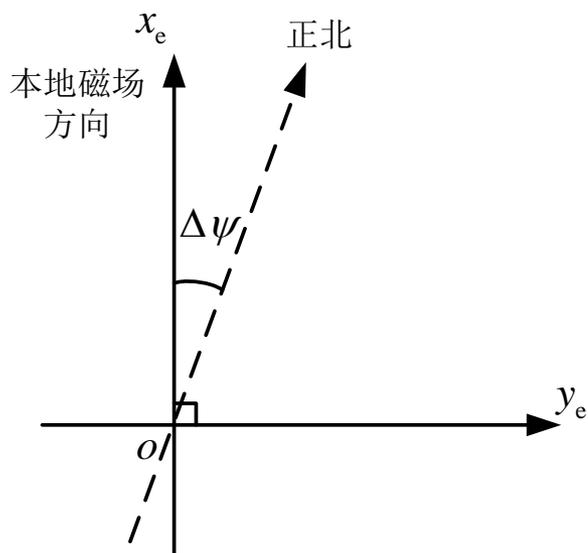


图. 本地磁场和正北

半自主飞行时，我们可以将惯性坐标系 x_e 轴指向本地磁场方向，如左图所示。从图中看出，本地磁场偏西。当作**全自主飞行**时，因为**需要**与地球的经纬度一致，我们可以将地球表面坐标系 x_e 轴指向正北方。

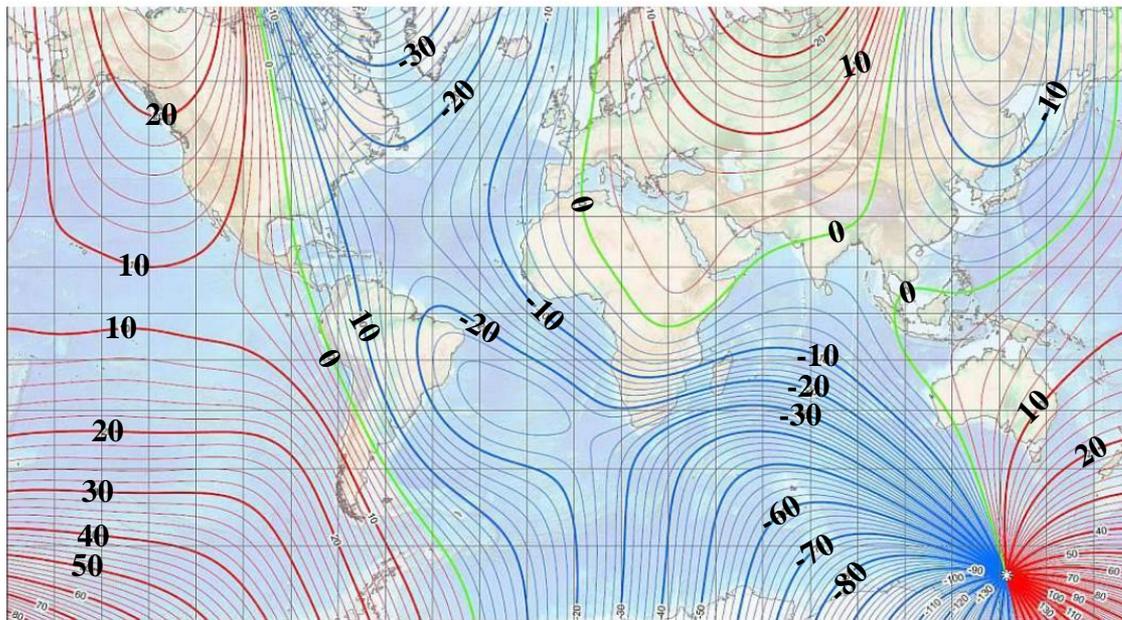


1. 姿态估计

□ 测量原理

(2) 偏航角测量原理

2) 第二步，加上或减去磁偏角修正到正北方向。



北京磁偏角约为 6° 偏西。
因此，在北京磁场方向上
加上 6° 的磁偏角，能找到
正北方。

图. 2010年世界磁偏角分布图，来源于<http://www.magnetic-declination.com/>



1. 姿态估计

□ 测量原理

(2) 偏航角测量原理

对于体型较大的飞行器，可以在机头和机尾安装GPS天线。通过测量它们的地理位置，来确定飞行器的偏航角。然而，对于小型多旋翼来说，安装空间很小，多个GPS之间基线很短，较难准确测定偏航角，除非利用高精度差分GPS。

如右图为**差分GPS**测向的原理。在多旋翼机头机尾装上两个差分GPS移动站（或双天线GPS），可以获取它们在地球坐标系下厘米级的定位精度，根据两点确定一条直线的方法，可以较简单地获取多旋翼的机头朝向。

注：两移动站分的越开，精度越高，距离越短精度越低，一般需要大于30cm。

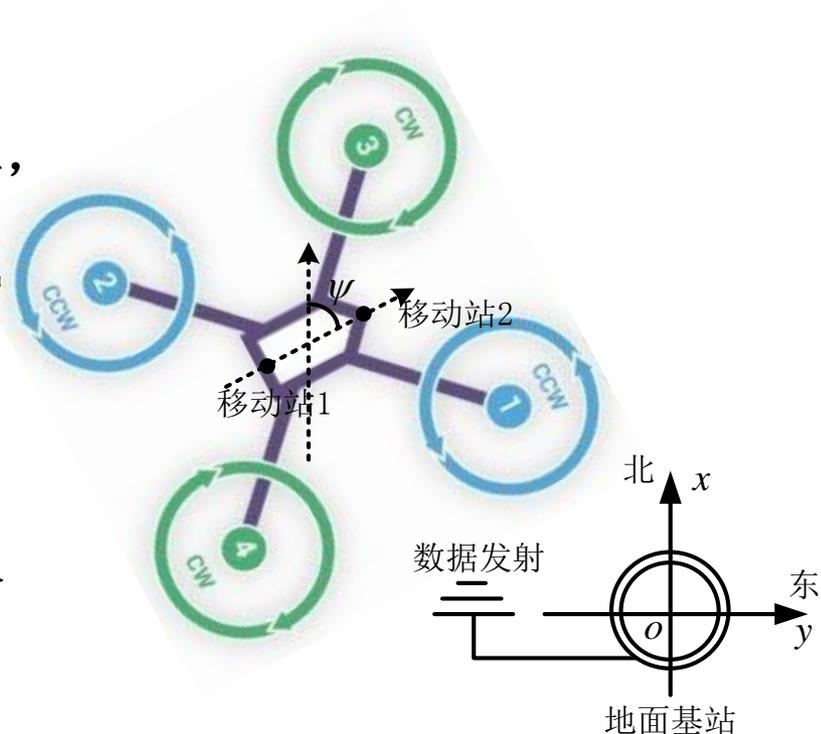


图. 差分GPS示意图



1. 姿态估计

□ 线性互补滤波

姿态角变化率 $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ 和陀螺仪的角速度 ${}^b\omega = [\omega_{x_b} \quad \omega_{y_b} \quad \omega_{z_b}]^T$ 有如下关系：

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix}$$

因为认为多旋翼工作过程中 $\theta \approx 0, \phi \approx 0$ ，所以我们近似认为

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix}$$

姿态角可以由惯导测量得到，没有漂移，但噪声大。另外一方面，姿态角也可以通过陀螺仪测得的角速度积分得到，但该方法会有漂移，但噪声小。互补滤波的基本思想是利用他们各自的优势，**在频域上特征互补，得到更准确的姿态角。**



1. 姿态估计

□ 线性互补滤波

(1) 俯仰角

下面我们着重以俯仰角为例，详细推导下线性互补滤波。俯仰角 θ 的拉氏变换可以表示为

$$\theta(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \theta(s) + \left(1 - \frac{1}{\tau s + 1}\right) \theta(s)$$

低通滤波器, $\tau \in \mathbb{R}_+$
表示时间常数

高通滤波器
 $\frac{\tau s}{\tau s + 1} = 1 - \frac{1}{\tau s + 1}$

为了估计俯仰角，以上式子的 θ 需要用传感器信息替代。

1) **加速度计**测量的俯仰角无漂移但噪声大，我们可以将测量到的俯仰角建模为

$$\theta_m = \theta + n_\theta$$

其中 n_θ 表示高频噪声， θ 表示真值。

2) **陀螺仪**的角速度测量会有漂移但噪声小，我们可以建模为

$$\frac{\omega_{y_b m}(s)}{s} = \theta(s) + c \frac{1}{s}$$

角速率积分的Laplace变换

常值漂移的Laplace变换



1. 姿态估计

□ 线性互补滤波

(1) 俯仰角

下面我们着重以俯仰角为例，详细推导下线性互补滤波。俯仰角 θ 的拉氏变换可以表示为

$$\theta(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \theta(s) + \left(1 - \frac{1}{\tau s + 1}\right) \theta(s)$$

低通滤波器, $\tau \in \mathbb{R}_+$
表示时间常数

高通滤波器
 $\frac{\tau s}{\tau s + 1} = 1 - \frac{1}{\tau s + 1}$

为了估计俯仰角，以上式子的 θ 需要用传感器信息替代。

线性互补滤波的标准形式以传递函数方式表示为

$$\hat{\theta}(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \theta_m(s) + \frac{\tau s}{\tau s + 1} \left(\frac{1}{s} \omega_{y_b m}(s) \right)$$

加速度计测量的俯仰角

陀螺仪的角速度积分



1. 姿态估计

□ 线性互补滤波

(1) 俯仰角

下面我们着重以俯仰角为例，详细推导下线性互补滤波。俯仰角 θ 的拉氏变换可以表示为

$$\theta(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \theta(s) + \left(1 - \frac{1}{\tau s + 1}\right) \theta(s)$$

低通滤波器, $\tau \in \mathbb{R}_+$
表示时间常数

高通滤波器
 $\frac{\tau s}{\tau s + 1} = 1 - \frac{1}{\tau s + 1}$

为了估计俯仰角，以上式子的 θ 需要用传感器信息替代。

线性互补滤波的标准形式以传递函数方式表示为

$$\hat{\theta}(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \theta_m(s) + \frac{\tau s}{\tau s + 1} \left(\frac{1}{s} \omega_{y_b m}(s) \right)$$

加速度计测量的俯仰角

陀螺仪的角速度积分

$$\hat{\theta}(s) = \theta(s) + \left[\frac{1}{\tau s + 1} n_\theta(s) + \frac{\tau s}{\tau s + 1} c \frac{1}{s} \right] \hat{\theta}(s) \approx \theta(s)$$

衰减为0



1. 姿态估计

线性互补滤波

(1) 俯仰角

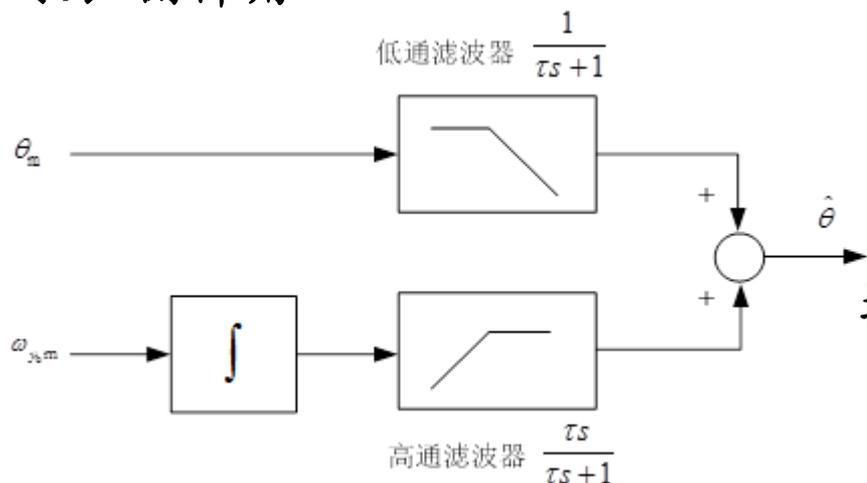


图. 互补滤波估计俯仰角流程图

为了计算机算法实现，需要对其进行离散化

$$\hat{\theta}(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \theta_m(s) + \frac{\tau s}{\tau s + 1} \left(\frac{1}{s} \omega_{y_{bm}}(s) \right)$$

通过一阶向后差分法[2]，将 s 表示为

$$s = (1 - z^{-1}) / T_s \quad T_s \in \mathbb{R}_+ \text{ 表示采样周期}$$

进一步表示为

$$\hat{\theta}(z) = \frac{1}{\tau \frac{1 - z^{-1}}{T_s} + 1} \theta_m(z) + \frac{\tau}{\tau \frac{1 - z^{-1}}{T_s} + 1} \omega_{y_{bm}}(z)$$

再把上式化为差分方程可以得到

$$\hat{\theta}(k) = \frac{\tau}{\tau + T_s} \left(\hat{\theta}(k-1) + T_s p_{bm}(k) \right) + \frac{T_s}{\tau + T_s} \theta_m(k)$$

低通滤波器将 θ_m 无漂移的优势保留下来，而高通滤波器将 $\omega_{y_{bm}}(s)/s$ 噪声小的优势保留下来

[2]. 高金源,夏洁,张平,周锐.计算机控制系统.高等教育出版社, 2010.



1. 姿态估计

□ 线性互补滤波

(1) 俯仰角

如果 $\tau/(\tau+T_s)=0.95$ ，那么 $T_s/(\tau+T_s)=0.05$

这样以上的互补滤波算法可以写为

$$\hat{\theta}(k) = 0.95(\hat{\theta}(k-1) + T_s \omega_{y_b m}(k)) + 0.05 \theta_m(k)$$

我们利用Pixhawk自驾仪传感器实时传回的数据进行了一阶向后差分法估计俯仰角，效果如右图所示。从结果不难看出通过互补滤波，可以得到平滑的俯仰角估计值，而对陀螺仪直接进行积分，结果是发散的。**滚转角**估计方法类似。

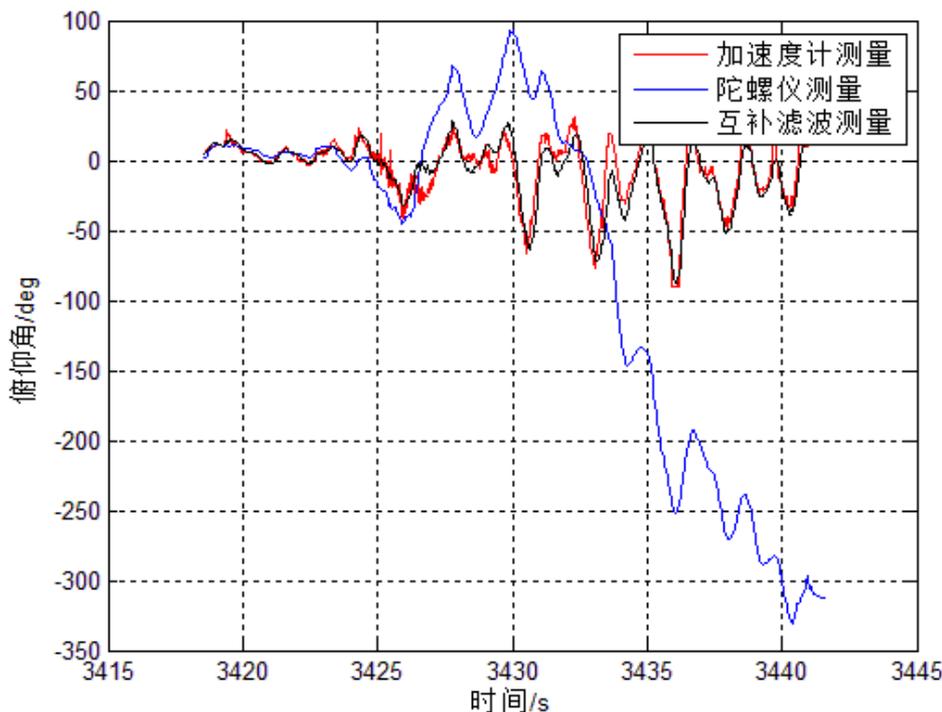


图. 互补滤波估计俯仰角实验仿真图



1. 姿态估计

□ 线性互补滤波

(2) 偏航角

如果偏航角可由GPS提供 ψ_{GPS} 和电子罗盘 ψ_{mag} 提供。一种简单的方法是定义测量的偏航角为两者的加权和，即

$$\psi_m = (1 - \alpha_\psi) \psi_{\text{GPS}} + \alpha_\psi \psi_{\text{mag}}$$

其中： $\alpha_\psi \in [0, 1]$ 是加权因子。因为电子罗盘的采样频率和陀螺仪的采样频率高于GPS，所以可以采取以下方式获取偏航角：

$$\psi_m(k) = \begin{cases} (1 - \alpha_\psi) \psi_{\text{GPS}}(k) + \alpha_\psi \psi_{\text{mag}}(k), & \psi_{\text{GPS}} \text{更新} \\ \psi_{\text{mag}}(k), & \text{其它} \end{cases}$$

得到 ψ_m 之后，可以得到偏航角估计为

$$\hat{\psi}(k) = \frac{\tau}{\tau + T_s} (\hat{\psi}(k-1) + T_s \omega_{z_{\text{bm}}}(k)) + \frac{T_s}{\tau + T_s} \psi_m(k)$$



1. 姿态估计

□ 非线性互补滤波

非线性互补滤波与线性互补滤波的大体思想相似，都是利用加速度计和陀螺仪各自的优势，不同之处在于它们不是直接线性相加，而是遵从角速度和角度的**非线性**关系。

定义 $\hat{\mathbf{R}}$ 表示互补滤波器估计输出的姿态旋转矩阵， \mathbf{R}_m 代表由加速度传感器和电子罗盘观测到的姿态旋转矩阵，而 $\tilde{\mathbf{R}}$ 表示 \mathbf{R}_m 与 $\hat{\mathbf{R}}$ 之间的误差，定义为

$$\tilde{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{R}_m$$

根据非线性互补滤波的原理，可以按照如下形式进行滤波（**具体细节参考[3]**）

$$\dot{\hat{\mathbf{R}}} = \left(\mathbf{R}_m^b \boldsymbol{\omega}_m + k_p \hat{\mathbf{R}} \boldsymbol{\xi} \right) \hat{\mathbf{R}}$$

陀螺仪的
角速度

增益参数

$\boldsymbol{\xi} = \text{vex} \left(\frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{R}}^T) \right)$, $\text{vex}([\mathbf{x}]_x) = \mathbf{x}$
角度测量

[3]. Mahony R, Hamel T, Pflimlin J M. Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(5): 1203-1218.



1. 姿态估计

□ 卡尔曼滤波

非线性互补滤波方法所用的状态量高达12维，而且参数选取不能保证最优。

为降低方程的非线性化程度，可以考虑以下一种卡尔曼滤波方法。定义[4]

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \dot{\mathbf{R}}_b^e = \mathbf{R}_b^e \left[{}^b\boldsymbol{\omega} \right]_x \Rightarrow \dot{\mathbf{R}}_e^b = - \left[{}^b\boldsymbol{\omega} \right]_x \mathbf{R}_e^b \\ \text{第三列提出来得到} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{过程模型} \\ \dot{\mathbf{x}} = - \left[{}^b\boldsymbol{\omega} \right]_x \mathbf{x} \end{array}$$

由于多旋翼在一般情况下，沿 x_b, y_b 的加速度值很小，因此加速度观测量可表示为

$$\mathbf{C} \cdot {}^b\mathbf{a}_m = g\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{n}_a \quad \begin{array}{l} \text{观测模型} \end{array}$$

其中 $\mathbf{C} = [\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{0}_{2 \times 1}] \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \mathbf{n}_a \in \mathbb{R}^2$ 。

[4]. Kang C W, Park C G. Attitude estimation with accelerometers and gyros using fuzzy tuned Kalman filter[C]//Control Conference (ECC), 2009 European. IEEE, 2009: 3713-3718.



2. 位置估计

□ 基于GPS的定位

多旋翼在飞行时，通过GPS或者视觉定位系统，可以获得当前的位置；联合高度传感器（一般为气压计），可以进一步获得当前的更精确的多旋翼位置信息。位置信息真实信息 ${}^e \mathbf{p} = [p_{x_e} \quad p_{y_e} \quad p_{z_e}]^T \in \mathbb{R}^3$ 。

过程模型可以表示为

$$\begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{R} \left({}^b \mathbf{a}_m - \mathbf{b}_a - \mathbf{n}_a \right) \\ \dot{\mathbf{b}}_a &= \mathbf{n}_{b_a} \\ \dot{b}_{p_{zbaro}} &= n_{b_{p_{zbaro}}} \end{aligned}$$

观测模型可以表示为

$$\begin{aligned} p_{xGPS} &= p_{x_e} + n_{p_{xGPS}} \\ p_{yGPS} &= p_{y_e} + n_{p_{yGPS}} \\ p_{zbaro} &= p_{z_e} + b_{p_{zbaro}} + n_{p_{zbaro}} \end{aligned}$$

- 如果考虑GPS的测量偏移？
- 如果考虑GPS的高度测量作为观测量？
- 实际过程中，气压计和GPS同时测高度面临问题？

用到了加速度计等惯性测量单元，气压计和GPS，传感器模型和参数请见第七课



2. 位置估计

□ 基于SLAM定位

SLAM (Simultaneous

Localization and Mapping), 也称同步定位与建图技术 [5, 6]。SLAM 问题可以描述为: **机器人在未知环境中从一个未知位置开始移动, 在移动过程中利用传感器估计自身位置的同时建造周围环境的增量式地图, 实现机器人的自主定位和导航。**



Autonomous Aerial Navigation in Confined Indoor Environments

From <https://www.youtube.com/watch?v=IMSozUpFFkU>

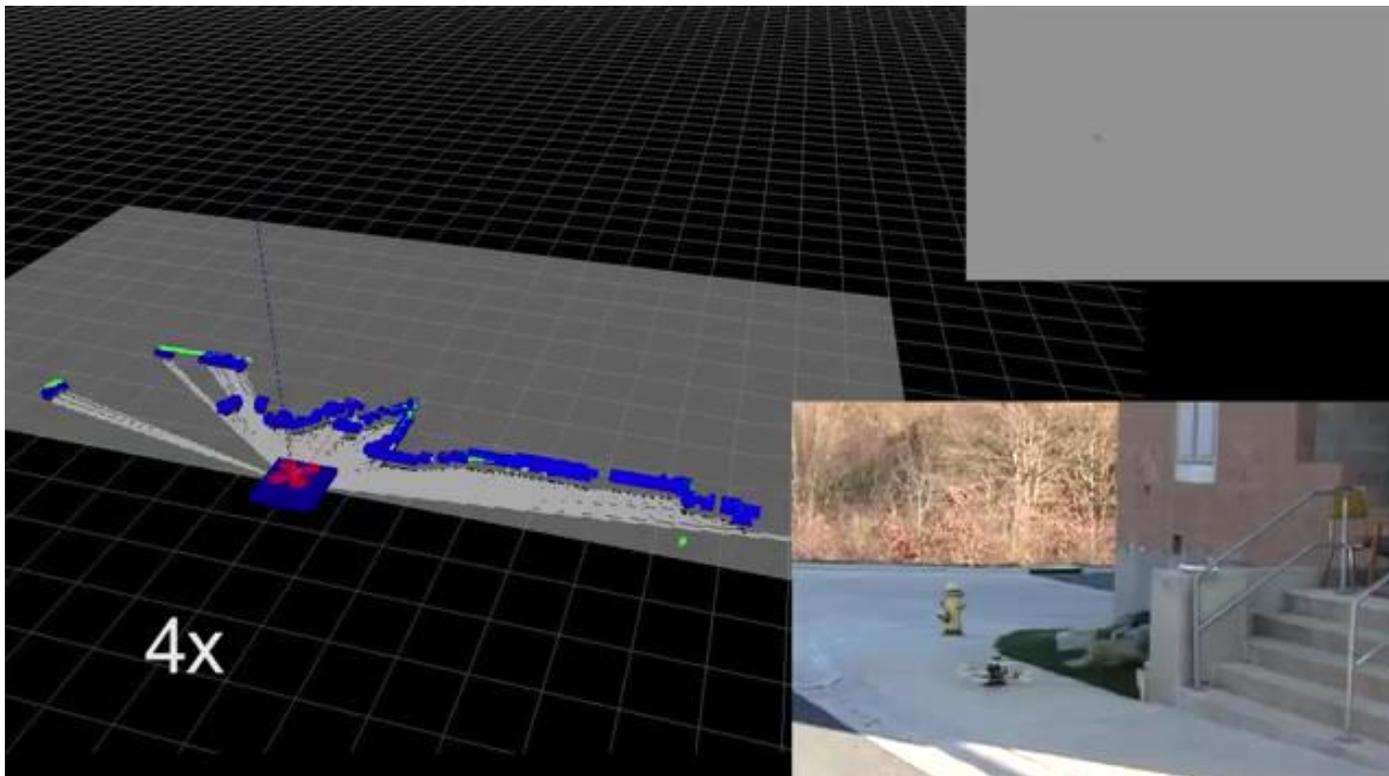
[5]. Whyte H, Balley T. Simultaneous Localization and Mapping (SLAM) Part 1 The Essential Algorithms[J]. IEEE Robotics & Automation Magazine, 2006.

[6]. Bailey T, Durrant-Whyte H. Simultaneous localization and mapping (SLAM): Part II[J]. IEEE Robotics & Automation Magazine, 2006, 13(3): 108-117.



2. 位置估计

□ 基于SLAM定位



Autonomous Aerial Navigation in Confined Indoor Environments.

<https://www.youtube.com/watch?v=IMSozUpFFkU>



2. 位置估计

表. 开源SLAM软件

作者	描述	链接
CyrrilStachniss, UdoFrese, Giorgio Grisetti	一个提供给做SLAM研究的平台，上面有很多公开的SLAM算法，同时包括一些数据。	http://openslam.org/
Kai Arras	提供了研究移动机器人SLAM的MATLAB仿真工具箱（CAS Robot Navigation Toolbox）	http://www.cas.kth.se/toolbox/
Tim Bailey	提供了EKF-SLAM, FastSLAM1.0, FastSLAM2.0, UKF-SLAM的MATLAB仿真算法	https://openslam.informatik.uni-freiburg.de/bailey-slam.html
Mark Paskin	提供了一些实现SLAM算法的Java类库，包括卡尔曼滤波、信息滤波和MATLAB交互的细化结点树滤波。	http://ai.stanford.edu/~paskin/slam/
Andrew Davison	提供了一些用来建图和定位的C++库Scene，能够实现实时单目SLAM功能	http://www.doc.ic.ac.uk/~ajd/Scene/index.html
Jos éNeira	提供了实现EKF-SLAM的MATLAB模拟器，证明了联合相容分支定界算法的数据关联	http://webdiis.unizar.es/~neira/software/slam/slamsim.htm
Dirk Hahnel	用C语言实现了基于网格的Fast-SLAM	http://dblp.uni-trier.de/pers/hd/h/H=auml=hnel:Dirk.html/
Durrant Whyte, EduardoNebot,et al	来自2002年在瑞典KTH举办的以SLAM为主题的暑期学校时候的MATLAB代码	http://www.cas.kth.se/SLAM/schedule.html



2. 位置估计

表. SLAM相关数据库

作者	描述	链接
Andrew Howard and Nicholas Roy	标准的机器人数据集，包括实际场景下激光和声纳数据；仿真环境下，不同传感器数据；不同的地图	http://radish.sourceforge.net/
Jose Guivant, Juan Nieto and Eduardo Nebot	大量的室外数据集，尤其包括著名的维多利亚公园的数据	http://www.acfr.usyd.edu.au/index.shtml
Radish (The Robotics Data Set Repository)	大量丰富的室内数据集，包括来自加利福尼亚大学图书馆、西雅图的Intel研究实验室、Edmonton会议中心的大片区域的数据	http://radish.sourceforge.net/
IJRR (The International Journal of Robotics Research)	IJRR对于每篇文章都有一个相关网页，包含大量数据结果及影像资料	http://www.ijrr.org/



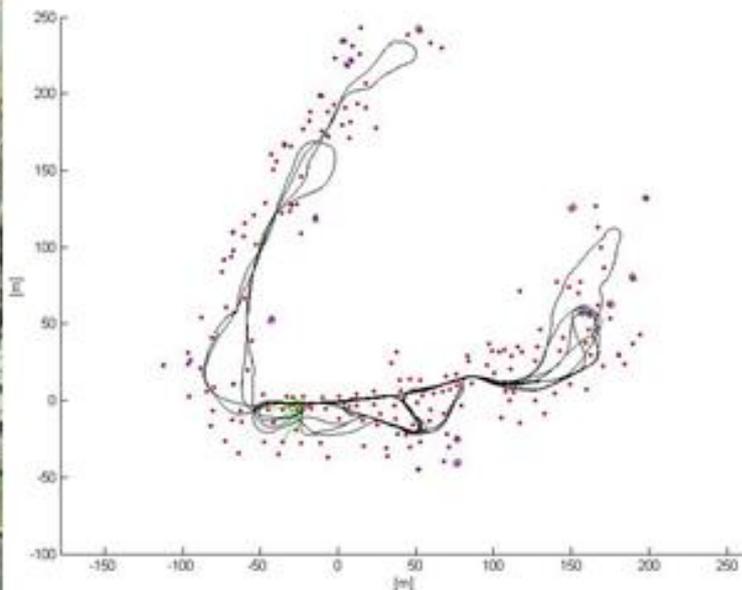
2. 位置估计

□ 基于SLAM定位

(1) 基于2D激光的SLAM



(a)



(b)

利用现有的维多利亚公园的数据，结合2D激光SLAM算法，进行MATLAB仿真实验。实际SLAM实验结果如左图(a)。而在实验仿真过程中，给出了惯导及激光扫描仪数据，直接利用这些数据代替实际的数据采集过程，不断地与原有的地标匹配和更新，这些特征地标有助于跟踪定位。最终仿真实验结果如图(b)所示。

图. 激光SLAM实验对比图，其中圆点表示运动过程中扫描的地标，线条表示运动轨迹



2. 位置估计

□ 基于SLAM定位

(1) 基于2D激光的SLAM

目前大部分算法多基于2D平面，因此对于多旋翼这种在三维空间运动的飞行器，我们要对算法的输入稍作改变。首先，要求多旋翼定高飞行，这样基本可以认为多旋翼在2D平面上运动。其次，认为飞行器是在走廊类型的空间飞行，也就是空间的水平截面是相同的，至少在指定高度周边是相同的。大部分室内环境可以认为满足这个条件。



[NUS UAV] Indoor autonomous quadrotor with laser scanner, NUSLion.

<https://www.youtube.com/watch?v=bbtQy5g4tuc>



2. 位置估计

□ 基于SLAM定位

(2) 基于视觉的SLAM

在视觉SLAM (VSLAM) 框架中, 有两个核心步骤, 一个是根据场景的结构信息求取摄像机姿态, 另一个是根据求取的摄像机姿态来重建场景的三维结构。

我们将第一个步骤称为跟踪(Tracking), 将第二个步骤称为建图(Mapping)。

- **Frame-by-Frame SLAM (连续帧SLAM)**

跟踪和建图的任务是交替进行的, 跟踪依赖于建图得到的场景结构信息, 而建图反过来又依赖于跟踪求取的摄像机姿态。

- **Keyframe SLAM (关键帧SLAM)**

将跟踪和建图两个任务分离开, 并且分别在两个独立的线程上运行。这样就可以在不影响相机跟踪实时性的前提下, 在建图任务中采用时间效率低、精确性高的运动求取结构技术



2. 位置估计

Parallel Tracking and Mapping
for Small AR Workspaces

Extra video results made for
ISMAR 2007 conference

Georg Klein and David Murray
Active Vision Laboratory
University of Oxford

Parallel Tracking and Mapping for Small AR Workspaces (PTAM) – extra.

<https://www.youtube.com/watch?v=Y9HMn6bd-v8>



2. 位置估计

□ 基于SLAM定位

(2) 基于视觉的SLAM

目前微型无人机多采用Keyframe SLAM或者说PTAM技术。由于SLAM方法大都采用单相机实现，因此**得不到位置的尺寸信息**。但是可以由加速度计、气压计或超声波模块得到。以文献[7]为例，介绍下如何将尺寸信息恢复。

建立过程模型如下：

$$\begin{aligned}\dot{p}_{z_e} &= v_{z_e} \\ \dot{v}_{z_e} &= a_{z_e m} + n_{a_{z_e}} \\ \dot{\lambda} &= n_{\lambda} \\ \dot{b}_{p_{z\text{baro}}} &= n_{b_{p_{z\text{baro}}}}\end{aligned}$$

$p_{z_e}, v_{z_e}, \lambda, b_{p_{z\text{baro}}}$ 分别表示高度、高度方向上的速度、尺度因子和气压计偏差，而 $n_{a_z}, n_{\lambda}, n_{b_{p_{z\text{baro}}}}$ 表示相应的高斯噪声。

[7] Achtelik M, Achtelik M, Weiss S, et al. Onboard IMU and monocular vision based control for MAVs in unknown indoor and outdoor environments[C]//Robotics and automation (ICRA), 2011 IEEE international conference on. IEEE, 2011: 3056-3063.



2. 位置估计

□ 基于SLAM定位

(2) 基于视觉的SLAM

目前微型无人机多采用Keyframe SLAM或者说PTAM技术。由于SLAM方法大都采用单相机实现，因此**得不到位置的尺寸信息**。但是可以由加速度计、气压计或超声波模块得到。以文献[7]为例，介绍下如何将尺寸信息恢复。

建立观测模型如下：

可观性？

$$p_{z\text{SLAM}} = \lambda \cdot p_{z_e} + n_{p_{z\text{SLAM}}} \quad \leftarrow \text{SLAM提供的高度信息}$$

$$p_{z\text{baro}} = p_{z_e} + b_{p_{z\text{baro}}} + n_{p_{z\text{baro}}} \quad \leftarrow \text{气压表提供的高度信息}$$

[7] Achtelik M, Achtelik M, Weiss S, et al. Onboard IMU and monocular vision based control for MAVs in unknown indoor and outdoor environments[C]//Robotics and automation (ICRA), 2011 IEEE international conference on. IEEE, 2011: 3056-3063.



2. 位置估计

Camera-based Navigation of a Low-Cost Quadcopter



Jakob Engel, Jürgen Sturm, Daniel Cremers
Computer Vision and Pattern Recognition Group
Technical University of Munich



Camera-based Autonomous Navigation with a Quadcopter.

<https://www.youtube.com/watch?v=tZxlDly7lno>



3. 速度估计

□ 基于光流的速度估计

(1) 光流

光流是指图像中所有像素点构成的一种二维(2D)瞬时速度场，其中的二维速度矢量是景物中可见点的三维速度矢量在成像表面的投影。

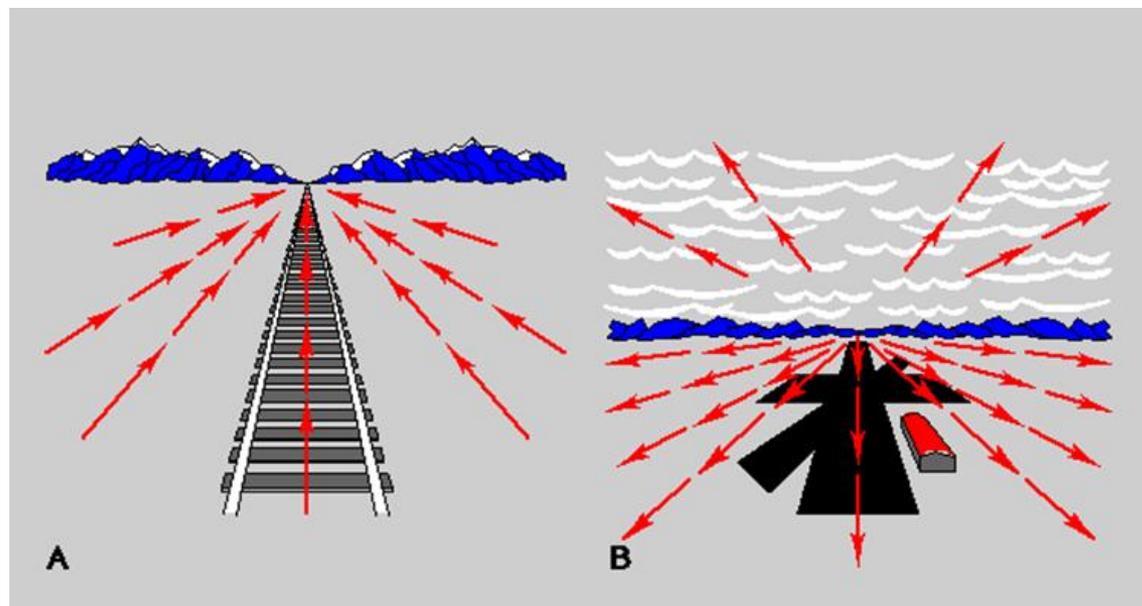


图. 光流示意图，来源于<http://opticflow.bu.edu/>. A图表示远离群山时的光流，B图表示靠近群山时的光流。



3. 速度估计

□ 基于光流的速度估计

(1) 光流

假定图像点 (x, y) 在时刻 t 的灰度为 $I(x, y, t)$ ，经过时间间隔 dt 后，对应点的变为 $(x+dx, y+dy)$ 。当 $dt \rightarrow 0$ 时，可以认为两点的灰度保持不变，也就是

$$I(x+dx, y+dy, t+dt) = I(x, y, t)$$

假设图像灰度是其位置和时间的连续变化函数，可以将上式的左边进行泰勒级数展开：

$$I(x+dx, y+dy, t+dt) = I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x} dx + \frac{\partial I}{\partial y} dy + \frac{\partial I}{\partial t} dt + \varepsilon$$

由于 $dt \rightarrow 0$ ，忽略 ε ，可以得到光流约束方程：

$$\text{光流 } v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} dx + \frac{\partial I}{\partial y} dy + \frac{\partial I}{\partial t} dt = 0$$

$$I_x v_x + I_y v_y + I_t = 0$$

图像灰度相对于 x, y, t 的偏导 $I_x = \frac{\partial I}{\partial x}, I_y = \frac{\partial I}{\partial y}, I_t = \frac{\partial I}{\partial t}$



3. 速度估计

□ 基于光流的速度估计

(1) 光流

表. 光流计算相关工具箱

名称	描述	网址
Computer Vision System Toolbox	MATLAB R2012a以及更高版本自带的计算机视觉工具箱，将光流计算封装成一个类vision.OpticalFlow	http://cn.mathworks.com/help/vision/index.html
OpenCV	开源计算机视觉库，提供很多光流计算的API接口函数，有1.x,2.x,3.0等版本	http://opencv.org/
Machine Vision Toolbox	侧重机器视觉、三维视觉方面的工具箱，MATLAB与现代计算机工作站结合	http://www.petercorke.com/Machine_Vision_Toolbox.html
VLFeat	计算机视觉/图像处理开源项目，使用C语言编写，提供C语言和MATLAB两种接口，实现大量计算机视觉算法	http://www.vlfeat.org/download.html
Peter Kovesi's Toolbox	全部由MATLAB的m文件实现计算机视觉算法，不需要编译安装，支持Octave，轻量好用	http://www.peterkovesi.com/matlabfns/



3. 速度估计

□ 基于光流的速度估计

(2) 光流与机体速度关系

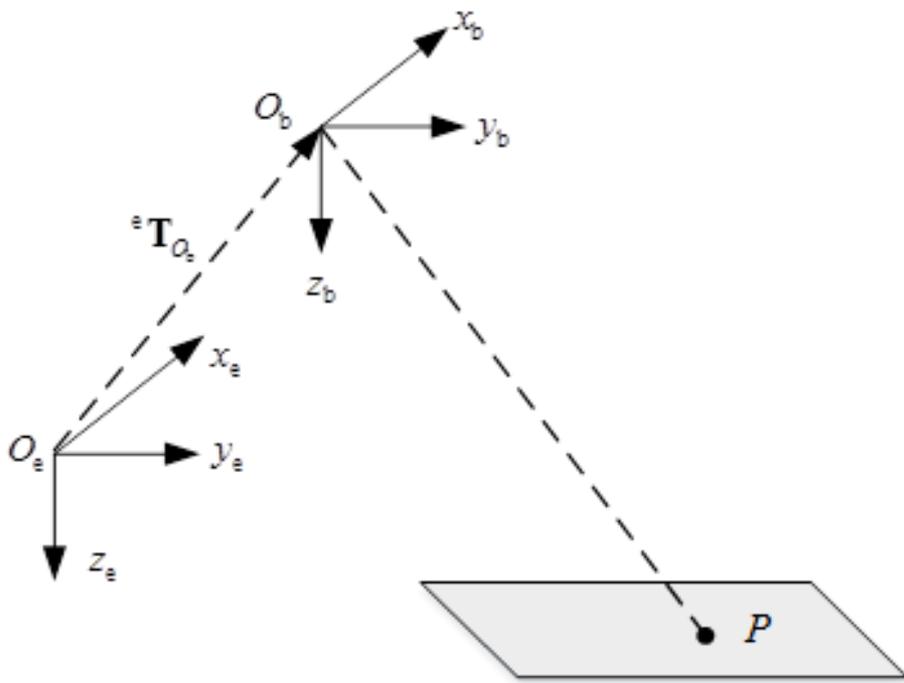


图. 摄像头坐标系与惯性坐标系

如右图所示，假设单目摄像头固连于飞行器质心，镜头垂直于机身向下安装，地面为近似平坦的。以摄像头光心为原点，建立摄像头坐标系，摄像头坐标系与多旋翼机体坐标系重合。



3. 速度估计

□ 基于光流的速度估计

(2) 光流与机体速度关系

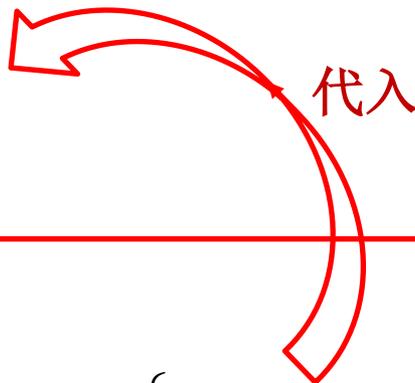
地面P点的归一化
图像坐标表示为

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{x_b} / p_{z_b} \\ p_{y_b} / p_{z_b} \end{bmatrix}$$



光流

$$\begin{cases} \dot{\bar{p}}_x = \frac{\dot{p}_{x_b} - \bar{p}_x \dot{p}_{z_b}}{p_{z_b}} \\ \dot{\bar{p}}_y = \frac{\dot{p}_{y_b} - \bar{p}_y \dot{p}_{z_b}}{p_{z_b}} \end{cases}$$



地面P点在惯性系和
机体系关系如下

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \left[{}^b \boldsymbol{\omega} \right]_{\times}$$

$${}^b \mathbf{v} = \mathbf{R}^T \cdot {}^e \mathbf{v}$$

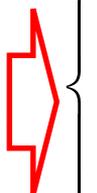
$${}^e \mathbf{p} = \mathbf{R} \cdot {}^b \mathbf{p} + {}^e \mathbf{T}_{o_b}$$

地面P点静止

$$0 \equiv {}^e \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot {}^b \mathbf{p} + \mathbf{R} \cdot {}^b \dot{\mathbf{p}} + {}^e \mathbf{v}$$



$${}^b \dot{\mathbf{p}} = -{}^b \mathbf{v} - \left[{}^b \boldsymbol{\omega} \right]_{\times} {}^b \mathbf{p}$$



$$\begin{cases} \dot{p}_{x_b} = -v_{x_b} - \omega_{y_b} p_{z_b} + \omega_{z_b} p_{y_b} \\ \dot{p}_{y_b} = -v_{y_b} - \omega_{z_b} p_{x_b} + \omega_{x_b} p_{z_b} \\ \dot{p}_{z_b} = -v_{z_b} - \omega_{x_b} p_{y_b} + \omega_{y_b} p_{x_b} \end{cases}$$



3. 速度估计

□ 基于光流的速度估计

(2) 光流与机体速度关系

最终写成抽象形式为



$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{p}}_x \\ \dot{\bar{p}}_y \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} = \frac{1}{p_{z_b}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & \bar{p}_x \\ 0 & -1 & \bar{p}_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}})} {}^b \mathbf{v} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{p}_x \bar{p}_y & -(1 + \bar{p}_x^2) & \bar{p}_y \\ (1 + \bar{p}_y^2) & -\bar{p}_x \bar{p}_y & -\bar{p}_x \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(\bar{\mathbf{p}})} {}^b \boldsymbol{\omega}$$

对于地面P点，图像点为 $\bar{\mathbf{p}}$ ，光流 $\dot{\bar{\mathbf{p}}}$ 可以通过光流解算方法获得（图像处理方式）

${}^b \boldsymbol{\omega}$ 可以通过三轴陀螺仪测量得到，而 p_{z_b} 可以通过超声波测距模块获得

$$\begin{cases} {}^e \mathbf{p} = \mathbf{R} {}^b \mathbf{p} + {}^e \mathbf{T}_{o_b} \\ \mathbf{e}_3^T {}^e \mathbf{T}_{o_b} = d_{\text{sonar}} \cos \theta \cos \phi \\ p_{z_e} = \mathbf{e}_3^T {}^e \mathbf{p} = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} {}^b \mathbf{p} = -d_{\text{sonar}} \cos \theta \cos \phi \Rightarrow p_{z_b} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \\ 1 \end{bmatrix} = -d_{\text{sonar}} \cos \theta \cos \phi \Rightarrow p_{z_b} = -\frac{d_{\text{sonar}} \cos \theta \cos \phi}{\mathbf{e}_3^T \mathbf{R} [\bar{p}_x, \bar{p}_y, 1]^T}$$



3. 速度估计

□ 基于光流的速度估计

(3) 基于光流的速度估计

如果有M个可求光流的图像点，我们有

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{p}}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}}_M) \end{bmatrix} {}^b \mathbf{v} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\bar{\mathbf{p}}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{B}(\bar{\mathbf{p}}_M) \end{bmatrix} {}^b \boldsymbol{\omega}$$

那么 ${}^b \mathbf{v}$ 的估计可采用以下方式得到

$${}^b \hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}}_M) \end{bmatrix}^\dagger \left(\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{p}}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}}_M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\bar{\mathbf{p}}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{B}(\bar{\mathbf{p}}_M) \end{bmatrix} ({}^b \boldsymbol{\omega}_m - \hat{\mathbf{b}}_\omega) \right)$$

其中，可采用 ${}^b \boldsymbol{\omega}_m - \hat{\mathbf{b}}_\omega$ 替代的真实的 ${}^b \boldsymbol{\omega}$ ，而 $(\cdot)^\dagger$ 为伪逆符号。

基于光流的设计存在着以下需要考虑的问题：

- (1) 陀螺仪、光流测量、高度测量的周期是不相同的，因此需要考虑它们测量值的时间对准；
- (2) 焦距长度不确定以及镜头畸变；
- (3) 地面不平整或背景在移动等；
- (4) 光流误匹配的处理。



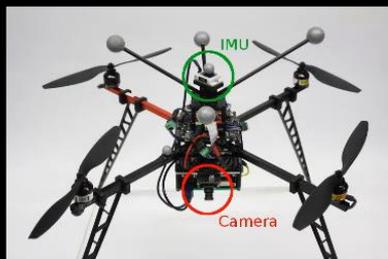
3. 速度估计

□ 基于光流的速度估计

(3) 基于光流的速度估计

The quadrotor estimates its metric velocity using only a down facing camera and an IMU. All computations are carried out on board.

Desired velocity commands from a gamepad are sent wirelessly to the vehicle.



Nonlinear Ego-Motion Estimation from Optical Flow for Online Control of a Quadrotor UAV.
<https://www.youtube.com/watch?v=HAOQo9qbH-8>



3. 速度估计

□ 基于气动模型的速度估计

参见第六章多旋翼的运动模型。引入由于螺旋桨挥舞产生的阻力，并简化，我们可以得到多旋翼气动阻力模型如下：

$$\dot{v}_{x_b} = -g \sin \theta - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} + n_{x_b}$$
$$\dot{v}_{y_b} = g \cos \theta \sin \phi - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} + n_{y_b}$$

其中， n_{x_b}, n_{y_b} 表示相应的噪声。 $\dot{v}_{x_b}, \dot{v}_{y_b}$ 就是表示在机体轴上的加速度。

在该情况下，按照前面姿态估计的方法求解角度，准确么？



3. 速度估计

基于气动模型的速度估计

过程模型:

姿态角变化率和角速度之间的关系

$$\dot{\theta} = (\omega_{x_m} - b_{\omega_x} - n_{\omega_x}) + (\omega_{y_m} - b_{\omega_y} - n_{\omega_y}) \tan \theta \sin \phi + (\omega_{z_m} - b_{\omega_z} - n_{\omega_z}) \tan \theta \cos \phi$$

$$\dot{\phi} = (\omega_{y_m} - b_{\omega_y} - n_{\omega_y}) \cos \phi - (\omega_{z_m} - b_{\omega_z} - n_{\omega_z}) \sin \phi$$

$$\dot{b}_{\omega_x} = n_{b_{\omega_x}}$$

$$\dot{b}_{\omega_y} = n_{b_{\omega_y}}$$

$$\dot{b}_{\omega_z} = n_{b_{\omega_z}}$$

$$\dot{v}_{x_b} = -g \sin \theta - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} + n_{a_x}$$

$$\dot{v}_{y_b} = g \cos \theta \sin \phi - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} + n_{a_y}$$

角速度替换为:

$${}^b \boldsymbol{\omega} = {}^b \boldsymbol{\omega}_m - \mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{n}_{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\dot{\mathbf{b}}_{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{n}_{b_{\boldsymbol{\omega}}}$$

其中

$$\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}} = [b_{\omega_x} \quad b_{\omega_y} \quad b_{\omega_z}]^T$$

$$\mathbf{n}_{\boldsymbol{\omega}} = [n_{p_b} \quad n_{q_b} \quad n_{r_b}]^T$$

$$\mathbf{n}_{b_{\boldsymbol{\omega}}} = [n_{b_{\omega_x}} \quad n_{b_{\omega_y}} \quad n_{b_{\omega_z}}]^T$$

观测模型:

$$a_{x_b} = -g \sin \theta - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} + n_{a_x}$$

$$a_{y_b} = g \cos \theta \sin \phi - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} + n_{a_y}$$

三轴加速度计测量

以上模型是非线性模型，需要采用扩展卡尔曼滤波。

[8]. Abeywardena D, Kodagoda S, Dissanayake G, et al. Improved State Estimation in Quadrotor MAVs: A Novel Drift-Free Velocity Estimator[J]. Robotics & Automation Magazine, IEEE, 2013, 20(4): 32-39.



3. 速度估计

□ 基于气动模型的速度估计

多旋翼的小角度假设即 $\theta \approx \phi \approx 0, \psi \approx \psi_d, \dot{\theta} \approx \dot{\phi} \approx \dot{\psi} \approx 0$, 所以忽略高阶小量可以得到[9]

- 线性过程模型:

$$\dot{\theta} = \omega_{x_b m} - b_{\omega_x} - n_{\omega_x}$$

$$\dot{\phi} = \omega_{y_b m} - b_{\omega_y} - n_{\omega_y}$$

$$\dot{b}_{\omega_x} = n_{b_{\omega_x}}$$

$$\dot{b}_{\omega_y} = n_{b_{\omega_y}}$$

$$\dot{b}_{\omega_z} = n_{b_{\omega_z}}$$

$$\dot{v}_{x_b} = -g\theta - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} + n_{x_b}$$

$$\dot{v}_{y_b} = g\phi - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} + n_{y_b}$$

- 建立线性观测模型如下:

$$a_{x_b m} = -g\theta - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} + n_{a_x}$$

$$a_{y_b m} = g\phi - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} + n_{a_y}$$

以上模型是线性模型，
采用卡尔曼滤波即可。

[9]. Leishman R C, Macdonald J C, Beard R W, et al. Quadrotors and accelerometers: State estimation with an improved dynamic model[J]. Control Systems, IEEE, 2014, 34(1): 28-41.



4. 障碍估计

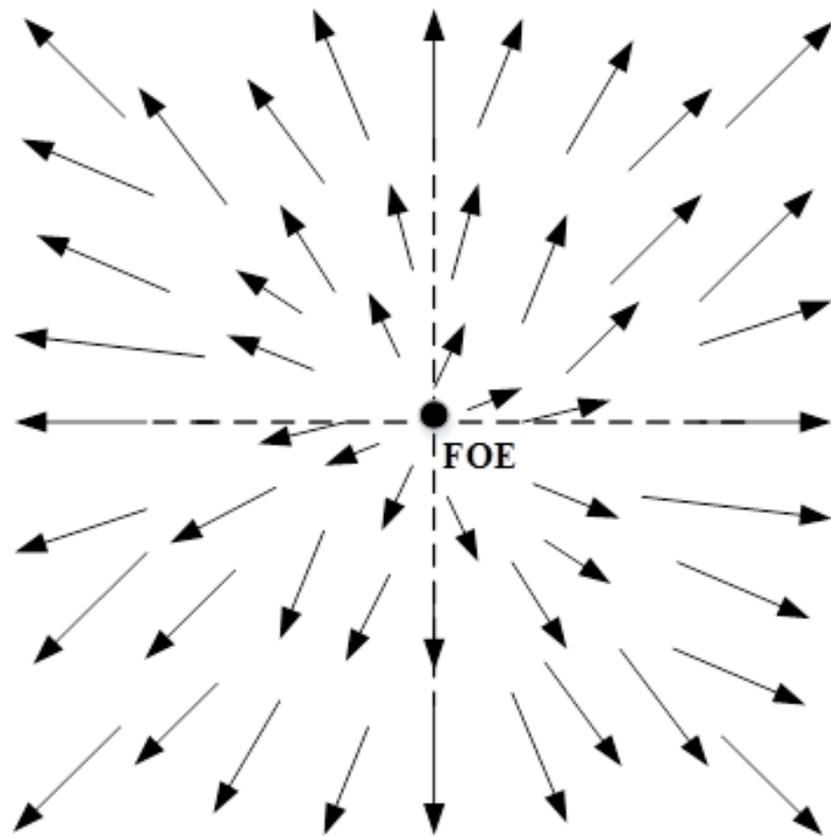


图. FOE点示意图

本节主要是依据**光流原理**进行避障操作。光流中包含三维场景丰富的运动信息以及结构信息，利用光流可以进行三维重建。本文仅从光流中恢复出相对深度TTC (Time to Contact/Collision, 碰撞时间)，然后利用TTC指导飞行器避障。而要计算TTC，一般需要先计算FOE (Focus of Expansion, 延伸焦点)。



4. 障碍估计

□ 计算FOE

光流与机体速度关系为

$$\dot{\bar{p}} = \mathbf{A}(\bar{p}) \cdot {}^b \mathbf{v} + \mathbf{B}(\bar{p}) \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}$$

$$\Delta \bar{p} = \dot{\bar{p}} - \mathbf{B}(\bar{p}) \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}$$

$$\Delta \bar{p} = \mathbf{A}(\bar{p}) \cdot {}^b \mathbf{v}$$

令 $\Delta \bar{p} = [\Delta \bar{p}_x \quad \Delta \bar{p}_y]^T$ 。展开上式得到

$$\frac{\Delta \bar{p}_x}{\Delta \bar{p}_y} = \frac{\bar{p}_x - c_x}{\bar{p}_y - c_y}$$

其中 $c_x = v_{x_b} / v_{z_b}$, $c_y = v_{y_b} / v_{z_b}$ 。实际上，由于光流和角速率都可能带有一定的噪声，因此我们需要通过多个点对应的直线的共同交点来求解。假定 $p_i, i=1, \dots, N$ 为选定的点，则有：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \bar{p}_{y,1} & -\Delta \bar{p}_{x,1} \\ \Delta \bar{p}_{y,2} & -\Delta \bar{p}_{x,2} \\ \vdots & \vdots \\ \Delta \bar{p}_{y,N} & -\Delta \bar{p}_{x,N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{p}_{x,1} \Delta \bar{p}_{y,1} - \bar{p}_{y,1} \Delta \bar{p}_{x,1} \\ \bar{p}_{x,2} \Delta \bar{p}_{y,2} - \bar{p}_{y,2} \Delta \bar{p}_{x,2} \\ \vdots \\ \bar{p}_{x,N} \Delta \bar{p}_{y,N} - \bar{p}_{y,N} \Delta \bar{p}_{x,N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{c}_x \\ \hat{c}_y \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{b})$$

最小二乘解



4. 障碍估计

□ 计算TTC

从单目图像序列中无法恢复场景的绝对深度，但从光流中可以计算得到碰撞时间 TTC。TTC 的数学定义为：

$$t_{\text{TTC}} = \frac{p_{z_b}}{v_{z_b}}$$

另外一方面

$$\Delta \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}})^b \mathbf{v}$$

$$\Delta \bar{p}_x = \frac{1}{p_{z_b}} (-v_{x_b} + \bar{p}_x v_{z_b})$$

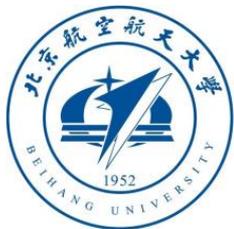
$$\Delta \bar{p}_y = \frac{1}{p_{z_b}} (-v_{y_b} + \bar{p}_y v_{z_b})$$

$$\Delta \bar{p}_x t_{\text{TTC}} = \bar{p}_x - c_x$$

$$\Delta \bar{p}_y t_{\text{TTC}} = \bar{p}_y - c_y$$

最小二乘解

$$t_{\text{TTC}} = \sqrt{\frac{(\bar{p}_x - \hat{c}_x)^2 + (\bar{p}_y - \hat{c}_y)^2}{\Delta \bar{p}_x^2 + \Delta \bar{p}_y^2}}$$



4. 障碍估计

□ 计算TTC

可以看出，光流的方向大概一致，且光流值较大的点其碰撞时间较小。说明更加容易发生碰撞。

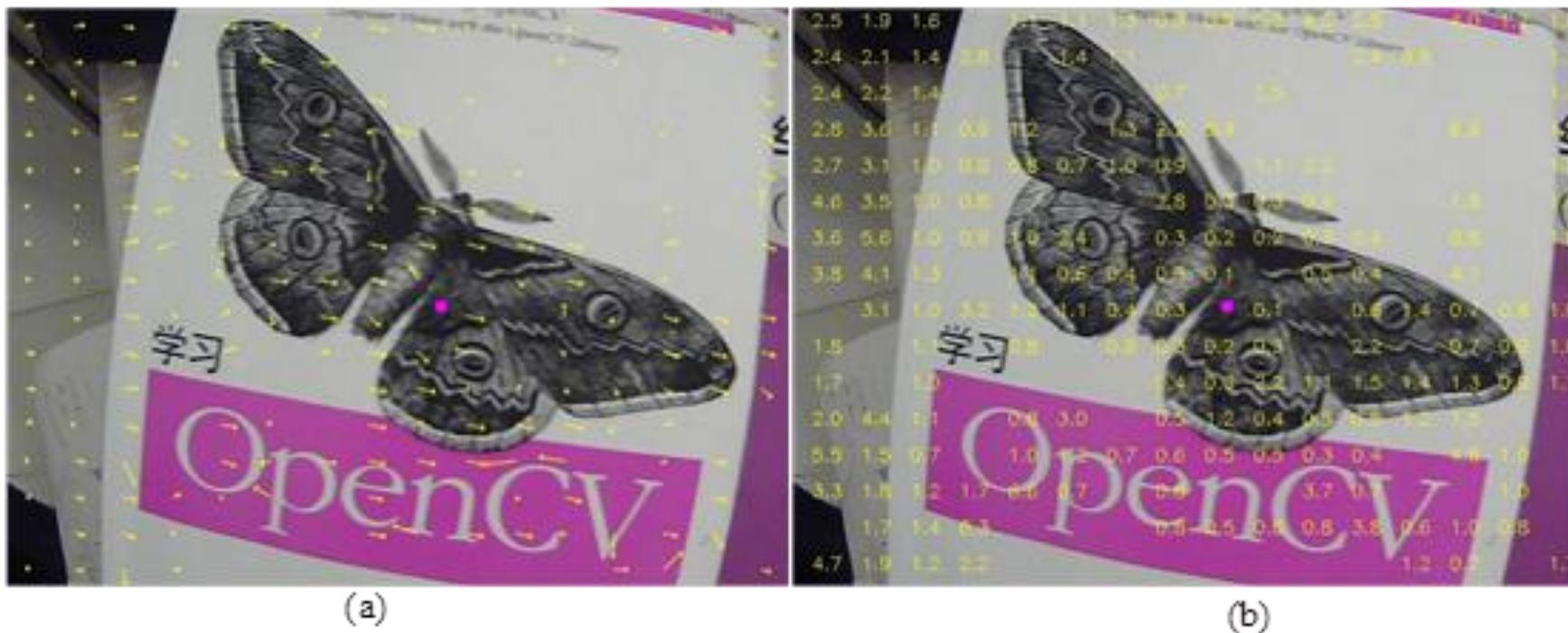


图. 光流场及碰撞时间示意图



5. APM自驾仪浅析

□ 模型建立

(1) 过程模型

地球表面惯性坐标系 $O_e x_e y_e z_e$ 按照“北东地”(North East Down, NED)坐标系方式建立,其中 $O_e x_e$ 轴指向地球北, $O_e y_e$ 轴指向地球东,以及 $O_e z_e$ 轴垂直于地球表面并指向下。采用四元数表征姿态,其中 $\mathbf{q}_e^b = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ 则机体坐标系到惯性坐标系的旋转矩阵(见第五讲坐标系与姿态表示):

$$\mathbf{R}_{q_e^b} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

➤ 四元数表征姿态和角速度的关系:

$$\dot{\mathbf{q}}_e^b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^b\boldsymbol{\omega}^T \\ {}^b\boldsymbol{\omega} & -[{}^b\boldsymbol{\omega}]_{\times} \end{bmatrix} \mathbf{q}_e^b$$



5. APM自驾仪浅析

□ 模型建立

(1) 过程模型

- 位置、速度和加速度的关系：
$${}^e \dot{\mathbf{p}} = {}^e \mathbf{v}$$
$${}^e \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}_{q_c}^b ({}^b \mathbf{a}_m - \mathbf{n}_a)$$
- 角速度模型（见第七讲传感器模型及校正）：
$${}^b \boldsymbol{\omega}_m = {}^b \boldsymbol{\omega} + \mathbf{b}_\omega + \mathbf{n}_\omega$$
$$\dot{\mathbf{b}}_\omega = \mathbf{n}_{b_\omega}$$
- 风速 $\mathbf{v}_w = [v_{w,n} \quad v_{w,e}]^T$ 建模为慢变的高斯噪声：
$$\dot{\mathbf{v}}_w = \mathbf{n}_w$$
- 地磁方向及其在机体轴上的分量的偏移建模为慢变高斯噪声：

$${}^e \dot{\mathbf{m}} = \mathbf{n}_m$$

$$\dot{\mathbf{b}}_m = \mathbf{n}_{b_m}$$



5. APM 自驾仪浅析

□ 模型建立

(1) 过程模型

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_x, \mathbf{n}_x)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_e^b \\ e \mathbf{v} \\ e \mathbf{p} \\ \mathbf{b}_\omega \\ \mathbf{v}_w \\ e \mathbf{m} \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix}, \mathbf{u}_x = \begin{bmatrix} {}^b \mathbf{a}_m \\ {}^b \boldsymbol{\omega}_m \end{bmatrix}, \mathbf{n}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_a \\ \mathbf{n}_\omega \\ \mathbf{n}_{b_\omega} \\ \mathbf{n}_w \\ \mathbf{n}_{m_e} \\ \mathbf{n}_{b_m} \end{bmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_x, \mathbf{n}_x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\left({}^b \boldsymbol{\omega}_m - \mathbf{b}_\omega - \mathbf{n}_\omega\right)^T \\ {}^b \boldsymbol{\omega}_m - \mathbf{b}_\omega - \mathbf{n}_\omega & -\left[{}^b \boldsymbol{\omega}_m - \mathbf{b}_\omega - \mathbf{n}_\omega\right]_x \end{bmatrix} \mathbf{q}_e^b \\ \mathbf{R}_{\mathbf{q}_e^b} \left({}^b \mathbf{a}_m - \mathbf{n}_a \right) \\ e \mathbf{v} \\ \mathbf{n}_{b_\omega} \\ \mathbf{n}_w \\ \mathbf{n}_{m_e} \\ \mathbf{n}_{b_m} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



5. APM自驾仪浅析

□ 模型建立

(2) 观测模型

➤ GPS位置观测: ${}^e \mathbf{p}_{\text{GPS}} = {}^e \mathbf{p} + \mathbf{n}_{\text{pGPS}}$

➤ GPS速度观测: ${}^e \mathbf{v}_{\text{GPS}} = {}^e \mathbf{v} + \mathbf{n}_{\text{vGPS}}$

➤ 磁场观测: $\frac{{}^b \mathbf{m}_m}{\|{}^b \mathbf{m}_m\|} = \mathbf{R}_{\mathbf{q}_e}^T \cdot {}^e \mathbf{m} + \mathbf{b}_m + \mathbf{n}_{\mathbf{m}_e}$

➤ 气压计观测: $p_{z\text{baro}} = p_{z_e} + n_{p_{z\text{baro}}}$

➤ 风速观测: $\mathbf{v}_{w,m}^* = \mathbf{v}_w + \mathbf{n}_{w,m}$

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_y)$$



$$\mathbf{y}_m = \begin{bmatrix} {}^e \mathbf{p}_{\text{GPS}} \\ {}^e \mathbf{v}_{\text{GPS}} \\ \frac{{}^b \mathbf{m}_m}{\|{}^b \mathbf{m}_m\|} \\ p_{z\text{baro}} \\ \mathbf{v}_{w,m}^* \end{bmatrix}, \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_y) = \begin{bmatrix} {}^e \mathbf{p} + \mathbf{n}_{\text{pGPS}} \\ {}^e \mathbf{v} + \mathbf{n}_{\text{vGPS}} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{q}_e}^T \cdot {}^e \mathbf{m} + \mathbf{b}_m + \mathbf{n}_{\mathbf{m}_e} \\ p_{z_e} + n_{p_{z\text{baro}}} \\ \mathbf{v}_w + \mathbf{n}_{w,m} \end{bmatrix}$$



5. APM自驾仪浅析

□ EKF算法

(1) 预测

先定义以下雅克比矩阵： $\Phi_{\hat{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_x, \mathbf{n}_x)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{x}}$, $\Gamma_{\hat{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_x, \mathbf{n}_x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\mathbf{x}=\hat{x}}$, $\mathbf{H}_{\hat{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_y)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{x}}$

第一步：通过第 $k-1$ 步的估计和惯导信息，推算第 k 步的值

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}_x(s), \mathbf{0}_{18 \times 1}) ds$$

具体的递推方程式为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_e^b(k) \\ {}^e \mathbf{v}(k) \\ {}^e \mathbf{p}(k) \\ \mathbf{b}_\omega(k) \\ \mathbf{v}_w(k) \\ {}^e \mathbf{m}(k) \\ \mathbf{b}_m(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}(k) \otimes \mathbf{q}_e^b(k-1) \\ {}^e \mathbf{v}(k-1) + {}^b \mathbf{a}_m(k-1) T_s \\ {}^e \mathbf{p}(k-1) + {}^e \mathbf{v}(k-1) T_s + \frac{T_s^2}{2} {}^b \mathbf{a}_m(k-1) \\ \mathbf{b}_\omega(k-1) \\ \mathbf{v}_w(k-1) \\ {}^e \mathbf{m}(k-1) \\ \mathbf{b}_m(k-1) \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{q}(k) = \begin{bmatrix} \cos(\|{}^b \boldsymbol{\omega}_m\| T_s) & \frac{{}^b \boldsymbol{\omega}_m \sin(\|{}^b \boldsymbol{\omega}_m\| T_s)}{\|{}^b \boldsymbol{\omega}_m\|} \end{bmatrix}$$



5. APM自驾仪浅析

□ EKF算法

(1) 预测

先定义以下雅克比矩阵：
$$\Phi_{\hat{x}} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_x, \mathbf{n}_x)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{x}}, \Gamma_{\hat{x}} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_x, \mathbf{n}_x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\mathbf{x}=\hat{x}}, \mathbf{H}_{\hat{x}} = \left. \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{n}_y)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{x}}$$

第二步：归一化四元数，得到预测状态值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$

第三步：计算雅克比矩阵

$$\Phi_{k-1} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_x, \mathbf{n}_x)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}}, \Gamma_{k-1} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_x, \mathbf{n}_x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}}$$

第四步：计算协方差矩阵

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = (\mathbf{I}_{22} + \Phi_{k-1} T_s) \mathbf{P}_{k-1|k-1} (\mathbf{I}_{22} + \Phi_{k-1} T_s)^T + T_s^2 \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_k \Gamma_{k-1}^T$$

其中， \mathbf{Q}_{k-1} 是在第 $k-1$ 步时的系统噪声方差阵。



5. APM自驾仪浅析

□ EKF算法

(2) 更新

由于各个传感器的更新率是不一样的，在APM/PX4飞控中，对于不同传感器观测校正是分开进行的，对于每个观测，滤波按下述方式进行。不仅如此，还考虑到每个传感器都存在时延，因此在更新过程中，飞控保存了一段时间的状态信息，假设时延为 d 个IMU周期。在APM/Px4中，时延是**事先测量**出的。

第五步：计算雅克比矩阵

$$\mathbf{H}_{k-d} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_y)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-d|k-d-1}} \quad \mathbf{K}_{k-d} = \mathbf{P}_{k-d|k-d} \mathbf{H}_{k-d}^T \left(\mathbf{H}_{k-d} \mathbf{P}_{k-d|k-d-1} \mathbf{H}_{k-d}^T + \mathbf{R}_{k-d} \right)^{-1}$$

第六步：更新第 $k-d$ 步的状态 $\hat{\mathbf{x}}_{k-d|k-d} = \hat{\mathbf{x}}_{k-d|k-d-1} + \mathbf{K}_{k-d} \left(\mathbf{y}_{m,k-d} - \mathbf{h} \left(\hat{\mathbf{x}}_{k-d|k-d-1}, \mathbf{0}_{12 \times 1} \right) \right)$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k-d|k-d-1} - \mathbf{K}_{k-d} \mathbf{H}_{k-d} \mathbf{P}_{k-d|k-d-1}$$

第七步：根据第 $k-d$ 步的状态递推预测当前时刻的状态（重复第一到第四步）

第八步：归一化四元数，得到当前时刻更新状态值，返回第一步继续



5. APM自驾仪浅析

□ EKF算法

(2) 更新

同时，在APM/Pixhawk自驾仪中，对观测的**异常数据**进行了检测。检测方法包括两方面：1) 通过卡尔曼滤波器估计的方差值估计观测值是否在正常范围内，主要是通过变化量是否在 $s-\delta$ 邻域内实现的，其中 $s \in \mathbb{R}$ 根据不同传感器特性选择。

例如，对于气压计高度的观测值 $p_{zbaro}(k)$ ，我们假定其分布应该满足均值为 $p_{z_e}(k-d|k-d-1)$ ，方差为 $\mathbf{P}_{k-d|k-d-1}(10,10)$ 的正态分布，即

$$p_{zbaro} \sim \mathcal{N}\left(p_{z_e}(k-d|k-d-1), \mathbf{P}_{k-d|k-d-1}(10,10)\right)$$

因此，如果

$$\left|p_{zbaro} - p_{z_e}(k-d|k-d-1)\right| > s\sqrt{\mathbf{P}_{k-d|k-d-1}(10,10)}$$

成立，则该观测值数据异常，需要剔除。2) 判断相邻观测时间间隔是否在一定范围内。若时间间隔太大则认为数据异常，需要剔除。



6. 总结

1. 运动估计是控制的基础，实际上它要比控制重要得多和复杂得多。
2. 目前，运动信息估计和周围环境的感知仍然是目前多旋翼领域研究的热点，特别是基于视觉的信息融合。
3. 除了以上介绍的内容，真实的运动估计还需要考虑许多实际的问题[10]:
 - (1) **处理器的使用**。因为机载的处理器运算能力有限，提供给估计的时间是有限的，所以如何高效地利用是要考虑的第一个问题。
 - (2) **异常数据**。在APM里面有90%的工作是在处理这些极端情况 (Corner Case)
 - (3) **测量不同步和延时**。实际中传感器提供信息的频率各不相同，而且也不可能是整倍数的关系。不仅如此，测量本身也存在未知延迟。

[10]. Paul Riseborough. Application of Data Fusion to Aerial Robotics. March 24, 2015, available online at <http://thirty5tech.com/vid/watch/Z3Qpi1Rx6HM>.



7. 作业

选做一题：

1. 根据基于视觉的SLAM中的过程模型和观测模型，判断系统是否可观。
2. 在利用GPS估计位置时，常常存在“丢星”问题而无法精确定位，这个时候需要融合其它传感器数据（IMU、视觉等），参考相关文献给出一种解决方案。
3. 自拟一道与本章节内容相关的题，并回答。（难度与上面题目相当，不能抄袭其他书籍）



资源

- (1) 课程中心 (课件、资料、作业等)
- (2) 可靠飞行控制研究组主页 (课件等)

<http://rfly.buaa.edu.cn/resources/>

- (3) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly (课件等)
- (4) 多旋翼设计与控制交流QQ群 183613048





谢谢!

感谢博士生 **邓恒、戴训华** 为本节课课件准备做出的贡献。

如课件有错误之处，请反馈到邮箱 **qq_buaa@buaa.edu.cn**