多旋翼飞行器设计与控制

第五讲 坐标系和姿态表示

全权 副教授

qq_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学

2016年4月7日 北航主南401

前言

东方智慧：中国古人很早就开始采用坐标定位原理观测星象。浑天仪是浑象和浑仪的总称。浑象的构造是一个大圆球上刻画或镶嵌星宿、赤道、黄道、恒稳圈、恒显圈等，类似天球仪。浑仪是一观测仪器，内有窥管，亦称望管，用以测定昏、旦和夜半中星以及天体的赤道坐标，也能测定天体的黄道经度和地平坐标。浑仪由早期四游仪和赤道环组成。从汉代到北宋浑仪增加了黄道环、地平环、子午环、六合仪、白道环、内赤道环、赤经环等。北宋的沈括取消白道环、改变一些环的位置。元代郭守敬取消了黄道环，并把原有的浑仪分为两个独立的仪器：简仪和立运仪。——文字来源百度百科，图片来源于中国计量测试学会网站http://www.china-csm.org/。

前言

欧拉角、旋转矩阵和四元数三种方式与机体角速度的关系？

大纲

1. 坐标系

2. 姿态表示

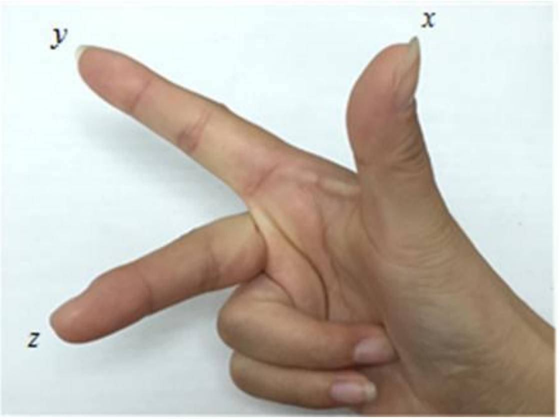
- 欧拉角
- 旋转矩阵
- 四元数

3. 小结

4. 作业

1. 坐标系

□ 右手定则



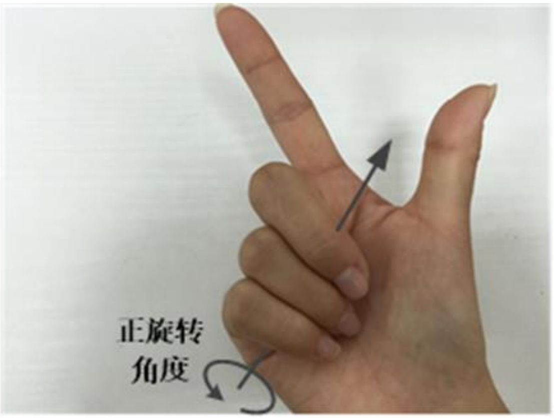


图 右手定则下的坐标轴和旋转正方向

如所上图示，右手的拇指指向x轴的正方向，食指指向y轴的正方向，中指所指示的方向即是z轴的正方向。进一步，如上图所示，要确定轴的正旋转方向，用右手的大拇指指向轴的正方向，弯曲手指。那么手指所指示的方向即是轴的正旋转方向。本章采用的坐标系和后面定义的角度正方向都是沿用右手定则。

1. 坐标系

□ 惯性坐标系与机体坐标系定义

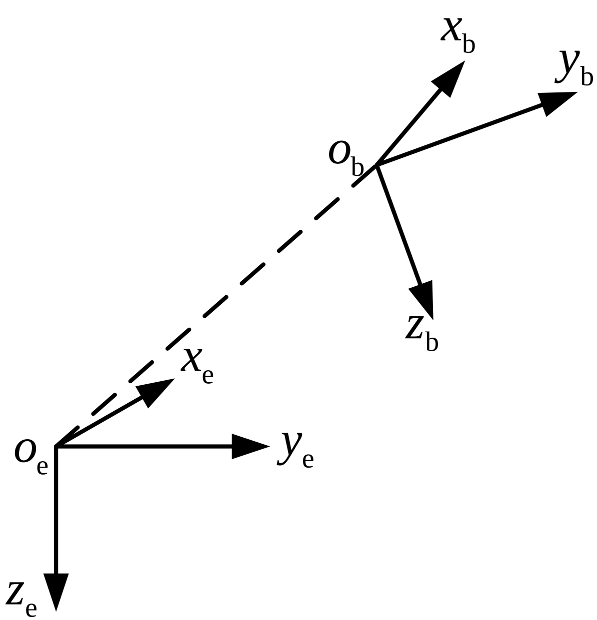


图 机体坐标系与地面坐标系的关系图

- **地球表面惯性坐标系**用于研究多旋翼飞行器相对于地面的运动状态，确定机体的空间位置坐标。它忽略地球曲率，即将地球表面假设成一张平面。在地面上选一点o_e作为多旋翼飞行器起飞位置。先让x_e轴在水平面内指向某一方向，z_e轴垂直于地面向下。然后，按右手定则确定y_e轴。
- **机体坐标系**，其原点o_b取在多旋翼的重心上，坐标系与多旋翼固连。x_b轴在多旋翼对称平面内指向机头（机头方向与多旋翼+字形或X字形相关）。z_b轴在飞机对称平面内，垂直x_b轴向下。然后，按右手定则确定y_b轴。
- **右下标e表示Earth，下标b表示Body**

1. 坐标系

□ 惯性坐标系与机体坐标系定义

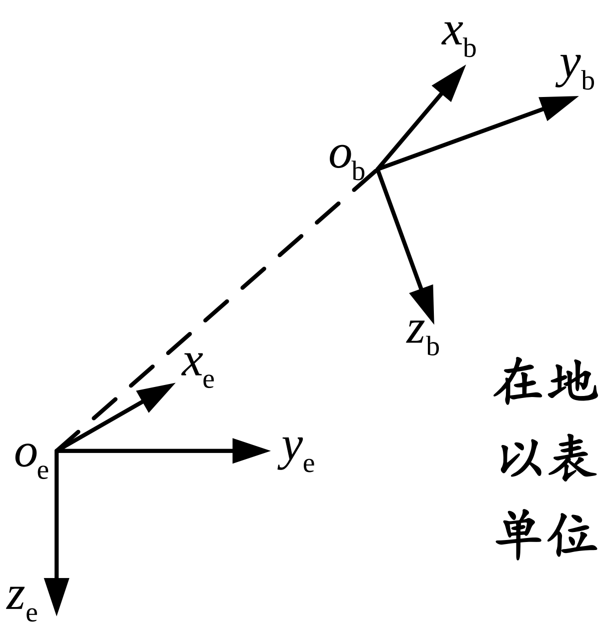


图 机体坐标系与地面坐标系的关系图

定义如下三个单位向量

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

在地球表面惯性坐标系中，沿着轴 $x_{\mathrm{e}},y_{\mathrm{e}},z_{\mathrm{e}}$ 的单位向量可以表示为 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$。在机体坐标系下，沿着$x_{\mathrm{b}},y_{\mathrm{b}},z_{\mathrm{b}}$轴的单位向量满足(注：左上标b表示向量在机体坐标系的表示)

$${}^{\mathrm{b}}\mathbf{b}_1=\mathbf{e}_1,\ {}^{\mathrm{b}}\mathbf{b}_2=\mathbf{e}_2,\ {}^{\mathrm{b}}\mathbf{b}_3=\mathbf{e}_3$$

在地球表面惯性坐标系中，沿着$x_{\mathrm{b}},y_{\mathrm{b}},z_{\mathrm{b}}$轴的单位向量表示为 $\{{}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_1,{}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_2,{}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_3\}$ (注：左上标e表示向量在惯性坐标系的表示)

2. 姿态表示

□ 欧拉角

（1）欧拉角定义

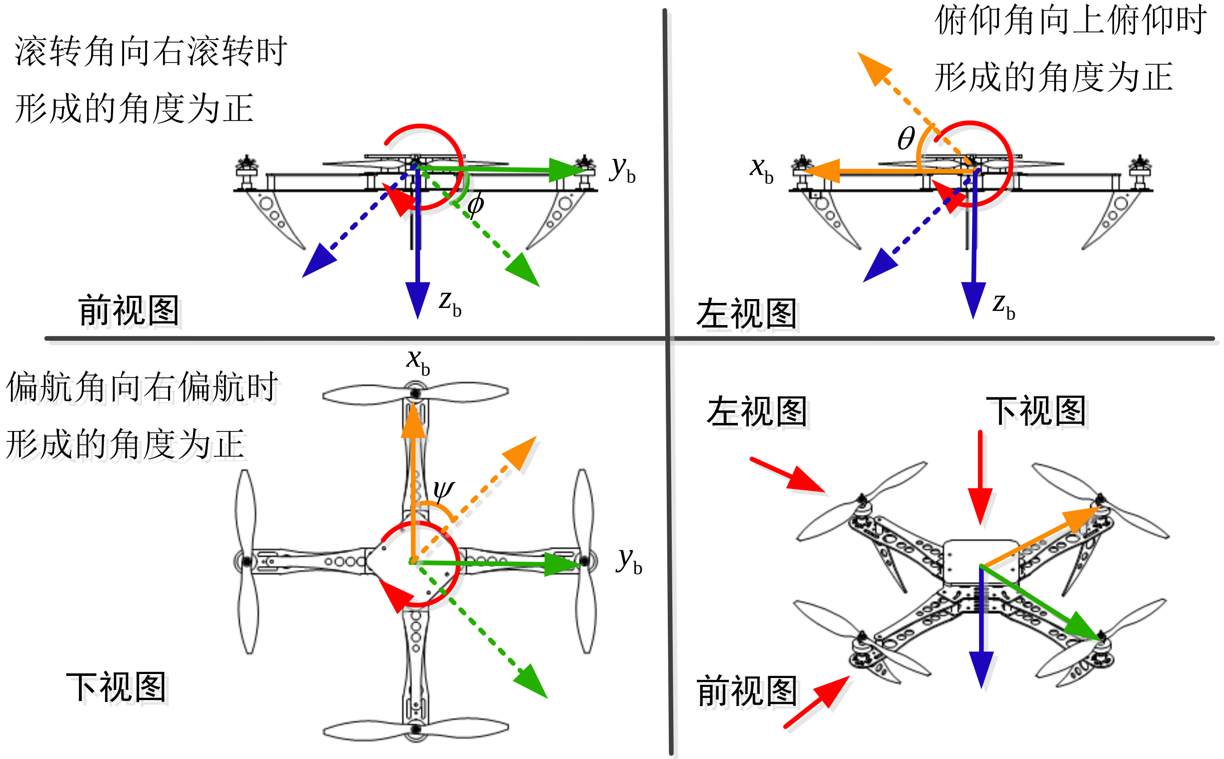


图. 欧拉角直观表示示意图(x轴黄色，y轴绿色，z轴蓝色)

2. 姿态表示

□ 欧拉角

（1）欧拉角定义

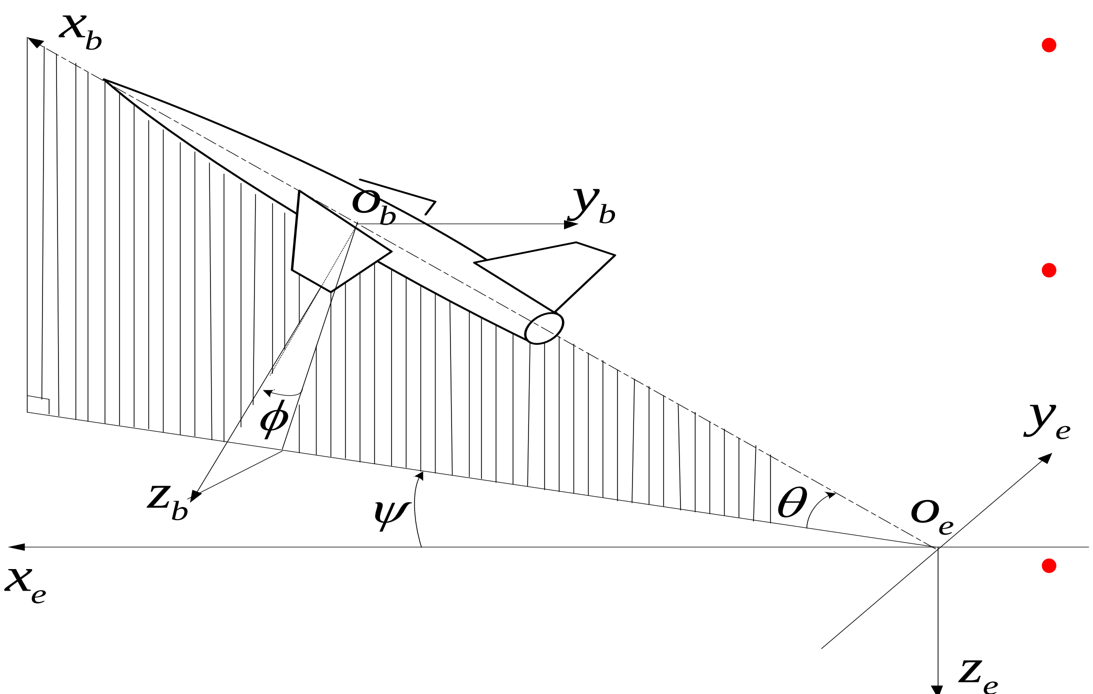


图. 飞机欧拉角示意图

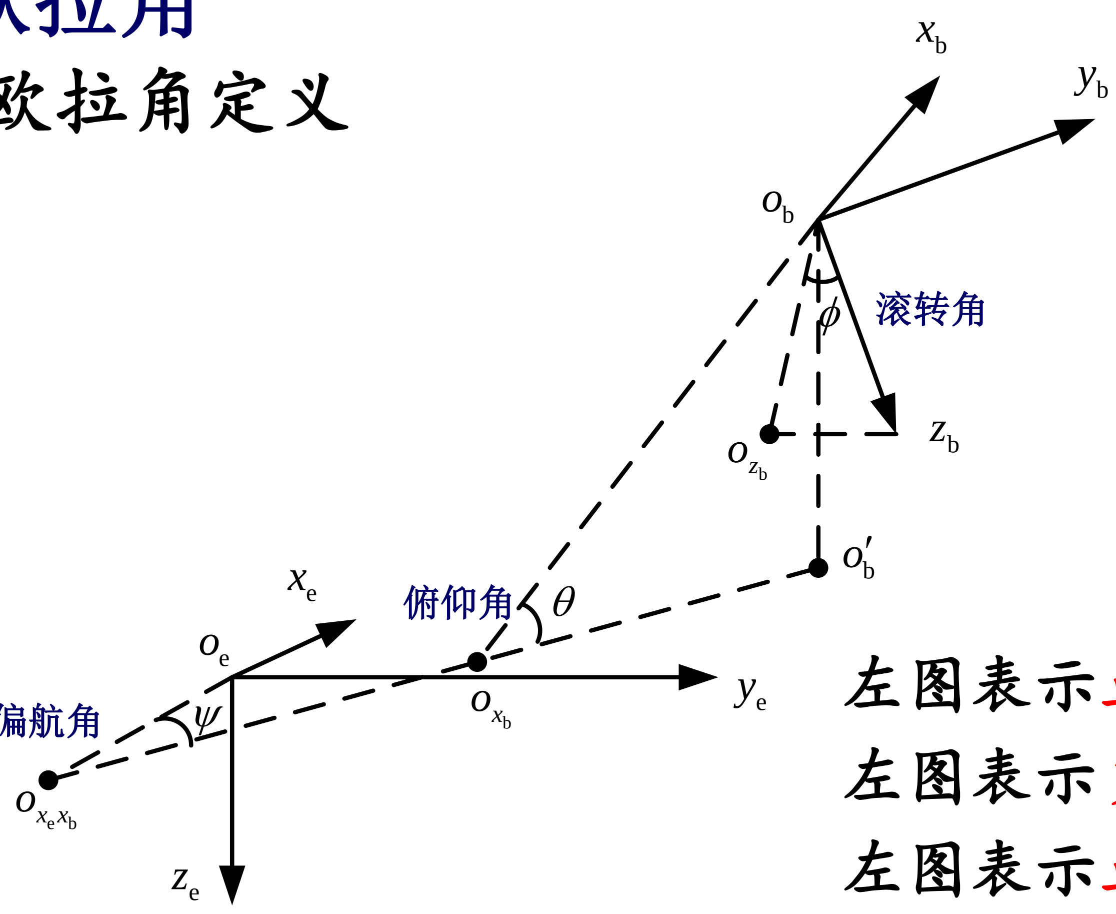
机体坐标系与地面惯性坐标系之间的夹角就是飞机的姿态角，又称**欧拉角**：

- **俯仰角θ：**机体轴与地平面（水平面 ）之间的夹角，飞机抬头为正。
- **偏航角（方位角）ψ：**机体轴在水平面上的投影与地轴之间的夹角，以机头右偏为正。
- **滚转角（倾斜角）ϕ：**飞机对称面绕机体轴 转过的角度，右滚为正。

2. 姿态表示

□ 欧拉角

（1）欧拉角定义



左图表示正的俯仰角θ;

左图表示负的滚转角ϕ;

左图表示正的偏航角ψ。

图. 欧拉角表示示意图

2. 姿态表示

◻ 欧拉角

（1）欧拉角定义

可以通过转换绕 $\mathbf{e}_3,\mathbf{k}_2,\mathbf{n}_1$ 轴分别旋转欧拉角 ψ,θ,ϕ 将地球表面惯性坐标系转动到机体坐标系

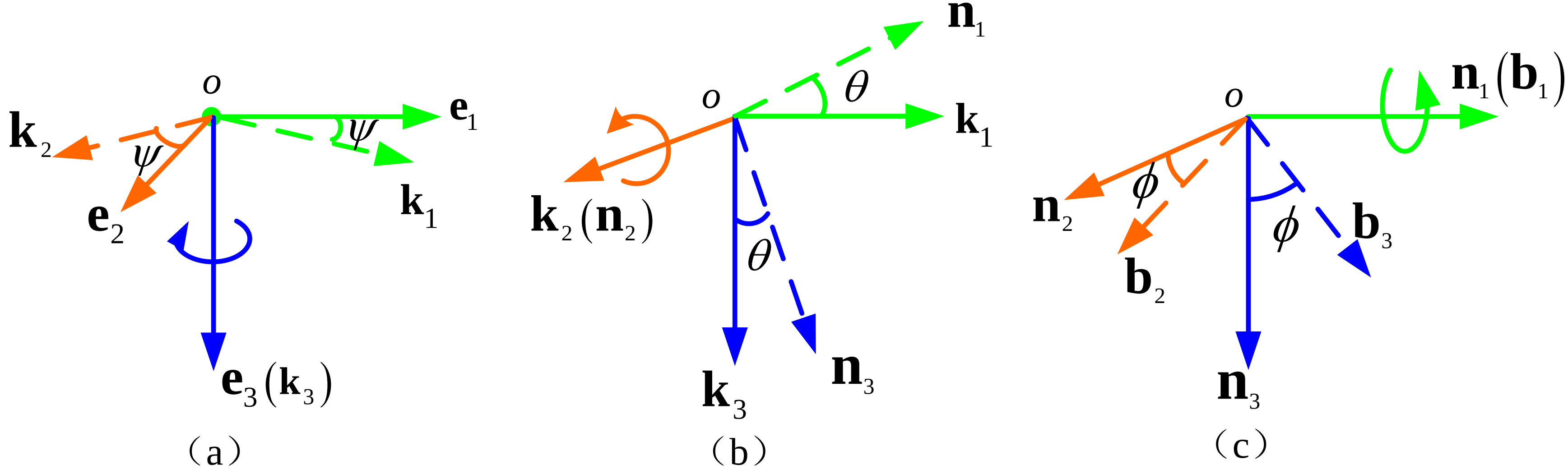


图. 偏航角、俯仰角与滚转角分步转动示意图

2. 姿态表示

□ 欧拉角

（2）欧拉角变化率与机体角速度的关系

机体旋转的角速率为 ${}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_{x_{\mathrm{b}}} & \omega_{y_{\mathrm{b}}} & \omega_{z_{\mathrm{b}}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

那么

$$\begin{bmatrix}\omega_{x_{\mathrm{b}}}\\ \omega_{y_{\mathrm{b}}}\\ \omega_{z_{\mathrm{b}}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} \quad ?$$

2. 姿态表示

☐ 欧拉角

（2）欧拉角变化率与机体角速度的关系

如果机体旋转的角速率为 ${}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_{x_{\mathrm{b}}} & \omega_{y_{\mathrm{b}}} & \omega_{z_{\mathrm{b}}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，那么

$$ {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}=\dot{\psi}\cdot{}^{\mathrm{b}}\mathbf{k}_3+\dot{\theta}\cdot{}^{\mathrm{b}}\mathbf{n}_2+\dot{\phi}\cdot{}^{\mathrm{b}}\mathbf{b}_1 $$

注：左上标b表示向量在机体坐标系的表示

因此有

$$ \begin{bmatrix}\omega_{x_{\mathrm{b}}}\\ \omega_{y_{\mathrm{b}}}\\ \omega_{z_{\mathrm{b}}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi\\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} $$

2. 姿态表示

□ 欧拉角

（2）欧拉角变化率与机体角速度的关系

进一步可以得到

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{W}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}$$

其中

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix}\phi & \theta & \psi\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix}$$

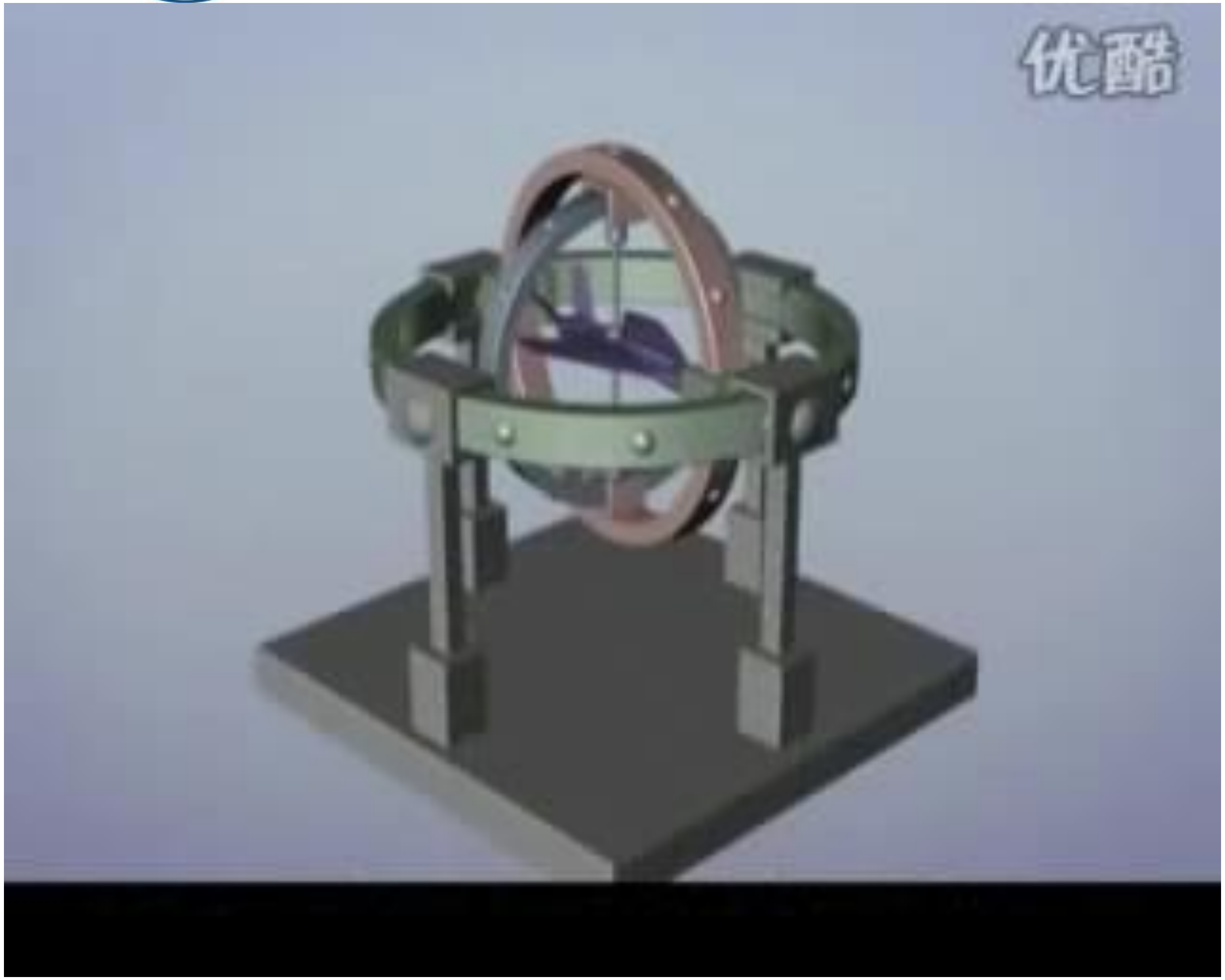
$\theta = \pm\pi/2$

奇异性问题

当 $\theta,\phi \approx 0$ 时，可以认为

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega_{x_{\mathrm{b}}} \\ \omega_{y_{\mathrm{b}}} \\ \omega_{z_{\mathrm{b}}}\end{bmatrix}$$

2. 姿态表示



万向节死锁
(Gimbal Lock)
奇异问题如何发生的

Euler (gimbal lock) Explained. **https://www.youtube.com/watch?v=rsKy-4dbA04**

2. 姿态表示

□ 旋转矩阵

（1）旋转矩阵定义

定义旋转矩阵为

右上标表示从机体坐标系b旋转到惯性坐标系e的旋转矩阵

$$\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}} = \left[{}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_1 \quad {}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_2 \quad {}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_3 \right]$$

$$\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}} \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{eT}} = \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{eT}} \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}} = \mathbf{I}_3$$

$$\det\left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\right) = 1$$

注：det ()表示求矩阵的行列式

旋转矩阵中的向量满足

$${}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_1 = \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\, {}^{\mathrm{b}}\mathbf{b}_1 = \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}} \mathbf{e}_1,\ {}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_2 = \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\, {}^{\mathrm{b}}\mathbf{b}_2 = \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}} \mathbf{e}_2,\ {}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_3 = \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\, {}^{\mathrm{b}}\mathbf{b}_3 = \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}} \mathbf{e}_3$$

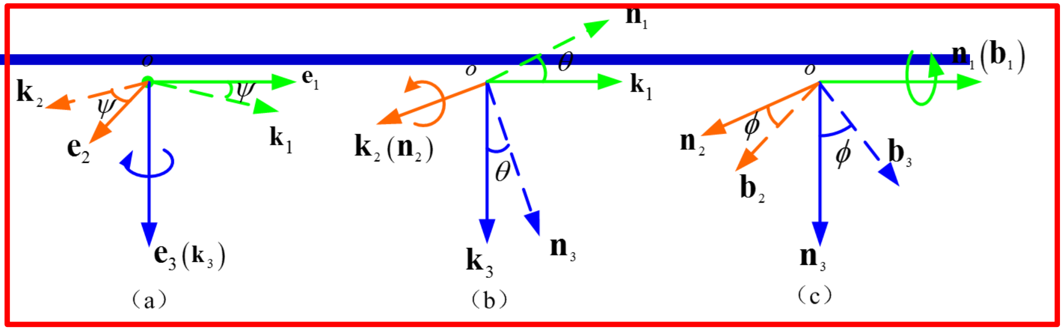
左上标e表示向量在惯性坐标系的表示

左上标b表示向量在机体坐标系的表示

2. 姿态表示

□ 旋转矩阵

（1）旋转矩阵定义



从地球表面惯性坐标系到机体坐标系的旋转可以通过三步来完成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_z(\psi)} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_y(\theta)} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 = \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{n}_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_x(\phi)} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 = \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix},$$

其中

$$\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

2. 姿态表示

◻ 旋转矩阵

（1）旋转矩阵定义

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{bmatrix}\xrightarrow{\mathbf{R}_z(\psi)}\begin{bmatrix}\mathbf{k}_1\\\mathbf{k}_2\\\mathbf{k}_3=\mathbf{e}_3\end{bmatrix}\xrightarrow{\mathbf{R}_y(\theta)}\begin{bmatrix}\mathbf{n}_1\\\mathbf{n}_2=\mathbf{k}_2\\\mathbf{n}_3\end{bmatrix}\xrightarrow{\mathbf{R}_x(\phi)}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1=\mathbf{n}_1\\\mathbf{b}_2\\\mathbf{b}_3\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\mathrm{b}^\mathrm{e}&=\left(\mathbf{R}_\mathrm{e}^\mathrm{b}\right)^{-1}=\left(\mathbf{R}_\mathrm{e}^\mathrm{b}\right)^\mathrm{T}\\&=\mathbf{R}_\mathrm{z}^{-1}(\psi)\mathbf{R}_y^{-1}(\theta)\mathbf{R}_x^{-1}(\phi)\\&=\mathbf{R}_z(-\psi)\mathbf{R}_y(-\theta)\mathbf{R}_x(-\phi)\\&=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & \cos\psi\sin\theta\sin\phi-\sin\psi\cos\phi & \cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\sin\phi\\ \cos\theta\sin\psi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi+\cos\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi-\cos\psi\sin\phi\\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

在奇异情况下，人为设定 $\phi=0$

由旋转矩阵反求欧拉角

$$\mathbf{R}_\mathrm{b}^\mathrm{e}=\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}&r_{13}\\r_{21}&r_{22}&r_{23}\\r_{31}&r_{32}&r_{33}\end{bmatrix}$$

$$\tan(\psi)=\frac{r_{21}}{r_{11}}\qquad \sin(\theta)=-r_{31}\qquad \tan(\phi)=\frac{r_{32}}{r_{33}}$$

$$\psi=\arctan\frac{r_{21}}{r_{11}}\qquad \theta=\arcsin(-r_{31})\qquad \phi=\arctan\frac{r_{32}}{r_{33}}$$

$\theta=\pm\pi/2$ 奇异性问题

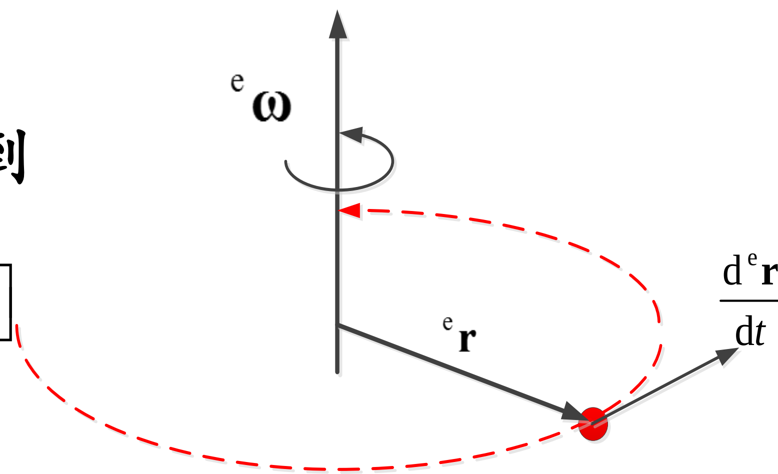
2. 姿态表示

□ 旋转矩阵

（2）旋转矩阵导数与机体角速度的关系

仅考虑刚体旋转（不考虑平动），由动力学知识可知，对任意向量 ${}^{\mathrm{e}}\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$ 求导（类比下圆周运动）

$$\frac{\mathrm{d}\,{}^{\mathrm{e}}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}={}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\omega}\times{}^{\mathrm{e}}\mathbf{r}$$



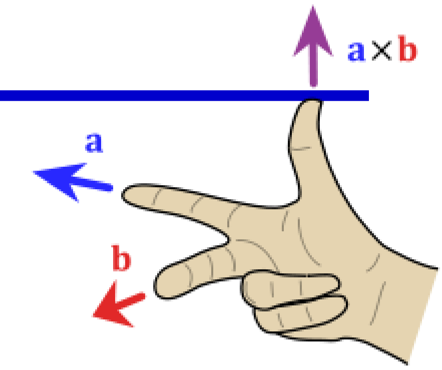
其中×表示向量的叉乘。我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\begin{bmatrix}{}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_1 & {}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_2 & {}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_3\end{bmatrix}}{\mathrm{d}t}={}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\omega}\times\begin{bmatrix}{}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_1 & {}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_2 & {}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_3\end{bmatrix}$$

进一步可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}={}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}$$

2. 姿态表示



□ 旋转矩阵

（2）旋转矩阵导数与机体角速度的关系

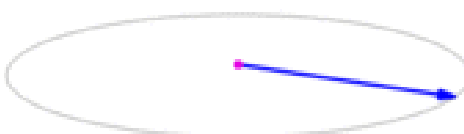
两个向量 $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_x & a_y & a_z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_x & b_y & b_z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 的**叉乘**定义为

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{b}$$

其中

$$[\mathbf{a}]_{\times}=\begin{bmatrix}0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sin\theta\,\mathbf{n}$$



以上图片来自https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product

2. 姿态表示

□ 旋转矩阵

（2）旋转矩阵导数与机体角速度的关系

由 ${}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\omega}=\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\,{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}$ 及叉乘的性质即可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} &= \left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\,{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right)\times\left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\left[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3\right]\right) \\
&= \left[\left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\,{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right)\times\left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\mathbf{e}_1\right) \quad \left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\,{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right)\times\left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\mathbf{e}_2\right) \quad \left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\,{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right)\times\left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\mathbf{e}_3\right)\right] \\
&= \left[\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\left({}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1\right) \quad \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\left({}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2\right) \quad \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\left({}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3\right)\right] \\
&= \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\left[{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1 \quad {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2 \quad {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3\right] \\
&= \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\left[{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right]_{\times}
\end{aligned}
$$

推导过程中用到了叉乘的性质：对于旋转矩阵 $\mathbf{R}\in\mathbb{R}^{3\times3}\left(\det\left(\mathbf{R}\right)=1\right)$ 和任意向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$，我们有

$$\left(\mathbf{Ra}\right)\times\left(\mathbf{Rb}\right)=\mathbf{R}\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)$$

- 采用旋转矩阵表示避免了奇异性问题。然而， 以上方程含有9个自由变量，因此求解微分方程的计算量比较大。

2. 姿态表示

□ 四元数

（1）四元数定义

四元数一般用向量的形式表示为

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_{\mathrm{v}} \end{bmatrix}$$

其中q_0为四元数的标量部分，$\mathbf{q}_{\mathrm{v}}=\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$为四元数的向量部分。对于一个实数$s$，其四元数表示形式为$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} s \\ \mathbf{0}_{3\times 1} \end{bmatrix}$，对于一个纯向量$\mathbf{v}$，其四元数表示形式 $\mathbf{q}=\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$

图. 爱尔兰都柏林布鲁穆桥（现称为金雀花桥 **Broom Bridge**）上的四元数石碑 ,图片来自 **https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion**

石碑上写着 **“Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ & cut it on a stone of this bridge.”**

2. 姿态表示

四元数

（2）四元数的基本运算法则

- 四元数加、减法 $\mathbf{p}\pm\mathbf{q}=\begin{bmatrix}p_0\\ \mathbf{p}_\mathrm{v}\end{bmatrix}\pm\begin{bmatrix}q_0\\ \mathbf{q}_\mathrm{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_0\pm q_0\\ \mathbf{p}_\mathrm{v}\pm\mathbf{q}_\mathrm{v}\end{bmatrix}$

- 四元数乘法 $\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}=\begin{bmatrix}p_0\\ \mathbf{p}_\mathrm{v}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}q_0\\ \mathbf{q}_\mathrm{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_0q_0-\mathbf{q}_\mathrm{v}^\mathrm{T}\mathbf{p}_\mathrm{v}\\ \mathbf{p}_\mathrm{v}\times\mathbf{q}_\mathrm{v}+p_0\mathbf{q}_\mathrm{v}+q_0\mathbf{p}_\mathrm{v}\end{bmatrix}$

一些运算性质(注：r, m是四元数，s为标量，u, v为列向量)

$$\mathbf{q}\otimes(\mathbf{r}+\mathbf{m})=\mathbf{q}\otimes\mathbf{r}+\mathbf{q}\otimes\mathbf{m}$$

$$\mathbf{q}\otimes\mathbf{r}\otimes\mathbf{m}=(\mathbf{q}\otimes\mathbf{r})\otimes\mathbf{m}=\mathbf{q}\otimes(\mathbf{r}\otimes\mathbf{m})$$

$$s\mathbf{q}=\mathbf{q}s=\begin{bmatrix}sq_0\\ s\mathbf{q}_\mathrm{v}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{q}_\mathbf{u}\otimes\mathbf{q}_\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{u}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{v}\\ \mathbf{u}\times\mathbf{v}\end{bmatrix}$$

2. 姿态表示

□ 四元数

（2）四元数的基本运算法则

- 四元数共轭

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

一些运算性质

$$(\mathbf{q}^*)^* = \mathbf{q}$$

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q})^* = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{p}^*$$

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})^* = \mathbf{p}^* + \mathbf{q}^*$$

- 四元数范数

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\|^2 &= \|\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^*\| = \|\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q}\| \\ &= q_0^2 + \mathbf{q}_v^{\mathrm{T}} \mathbf{q}_v \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \end{aligned}$$

一些运算性质

$$\|\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|$$

$$\|\mathbf{q}^*\| = \|\mathbf{q}\|$$

2. 姿态表示

四元数

（2）四元数的基本运算法则

- 四元数的逆 $\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}^{-1}=\begin{bmatrix}1\\ \mathbf{0}_{3\times1}\end{bmatrix}$

由 $\mathbf{q}^*$ 的定义可知，四元数的逆可以表示为 $\mathbf{q}^{-1}=\dfrac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|}$

- 单位四元数

当四元数 $\mathbf{q}$ 的范数 $\|\mathbf{q}\|=1$ 时，四元数 $\mathbf{q}$ 称为单位四元数。单位四元数有如下性质：当四元数 $\mathbf{p},\mathbf{q}$ 和向量 $\mathbf{v}$ 满足 $\|\mathbf{v}\|=\|\mathbf{p}\|=\|\mathbf{q}\|=1$ 时，有

$$\|\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}\|=1$$

$$\mathbf{q}^{-1}=\mathbf{q}^*$$

$$\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ \mathbf{0}_{3\times1}\end{bmatrix}$$

2. 姿态表示

□ 四元数

（3）四元数与旋转

假如$\mathbf{q}$表示旋转，而$\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^3$表示向量，那么在旋转$\mathbf{q}$下，向量$\mathbf{v}_1$变为向量$\mathbf{v}_1'$。我们用如下形式表示这个过程

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} \\ \mathbf{v}_1' \end{bmatrix} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} \boxed{0} \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}^{-1}$$

第一行是恒成立的

单位四元数的物理含义是 $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \mathbf{v}\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$

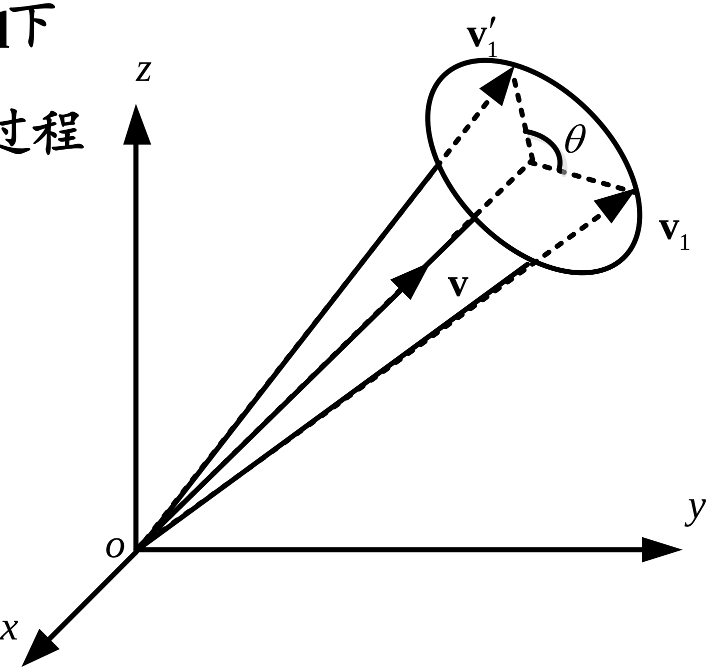


图. 单位四元数物理含义

这一部分可进一步参考Shoemake K. Quaternions. Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, USA, 1994 [Online], available: http://www.cs.ucr.edu/~vbz/resources/quatut.pdf

2. 姿态表示

□ 四元数

（3）四元数与旋转

已知两个三维单位向量$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \left(\mathbf{v}_1 \neq \pm\mathbf{v}_0\right)$。定义$\theta/2$为$\mathbf{v}_0$到$\mathbf{v}_1$之间的角度，可以推知

$$\mathbf{v}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_1 = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1}{\left\|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1\right\|} = \frac{\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1}{\left\|\mathbf{v}_0\right\|\left\|\mathbf{v}_1\right\|\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1}{\sin\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}\sin\frac{\theta}{2}$$

定义一个单位四元数，可以得到

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \mathbf{v}\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}^*$$

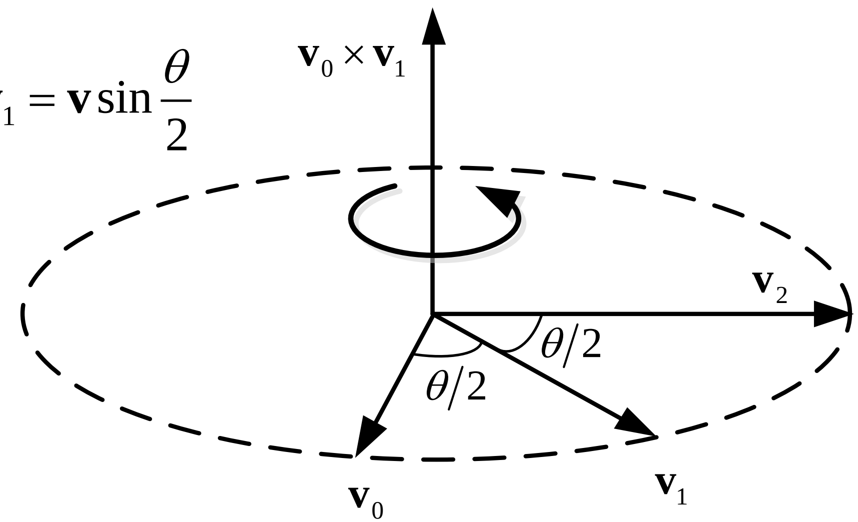


图. 四元数旋转示意图

2. 姿态表示

◘ 四元数

（3）四元数与旋转（为什么能表示旋转）

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}^{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^* &= \left(\mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}^{-1} \right) \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^* \\
&= \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^* \right) \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^* \\
&= \mathbf{q} \otimes \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \right) \otimes \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^* \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^* \right) \\
&= \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{q} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}^*
\end{aligned}$$

$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 的内积与外积相等，因此三个向量处于同一平面，且 $\mathbf{v}_2$ 与 $\mathbf{v}_1$ 的夹角也为 $\theta/2$，正如下图所示。

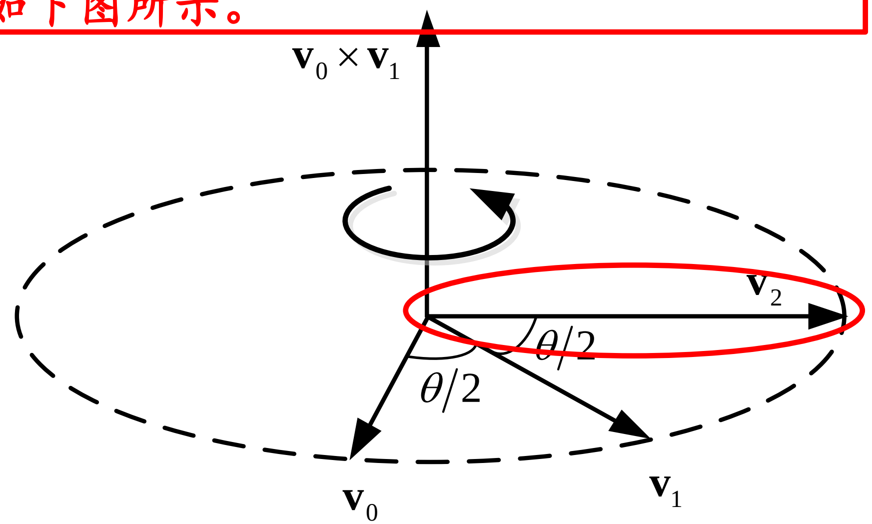


图. 四元数旋转示意图

2. 姿态表示

□ 四元数

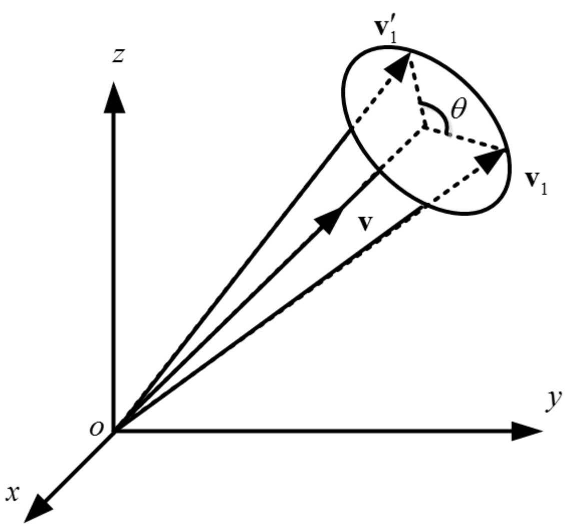
(3) 四元数与旋转

- 向量旋转

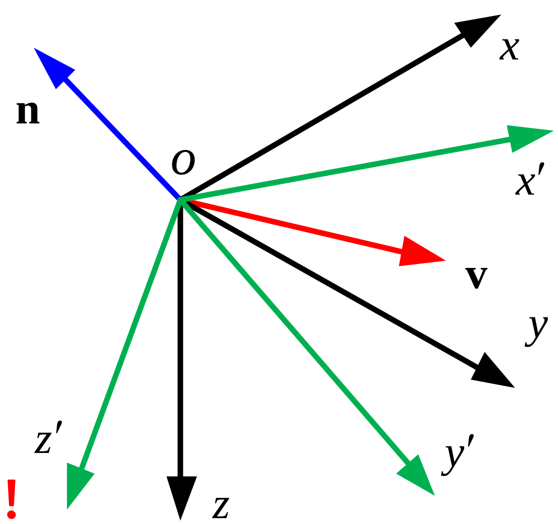
$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1' \end{bmatrix} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}^{-1}$$

- 坐标系旋转

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1' \end{bmatrix} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}$$



注意两者的不同！



2. 姿态表示

□ 四元数

（4）四元数与旋转矩阵转换

右上标表示从惯性坐标系e旋转到机体坐标系b的单位四元数

假定地球表面惯性坐标系到机体坐标系的旋转四元数为 $\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，

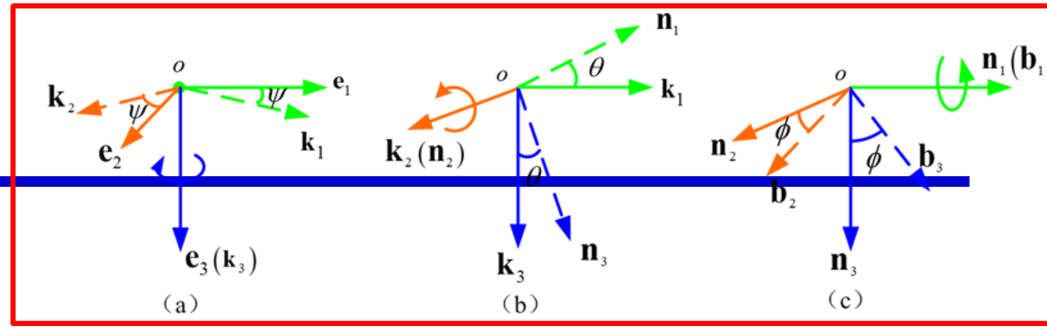
则有（坐标系旋转）

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{e}}\mathbf{r} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\right)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{b}}\mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}} = \mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{b}}\mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes \left(\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{e}}\mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{b}}\mathbf{r} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad {}^{\mathrm{e}}\mathbf{r} = \mathbf{C}\,{}^{\mathrm{b}}\mathbf{r} \qquad \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}) = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}$$

2. 姿态表示



◻ 四元数

（5）四元数与欧拉角转换

根据旋转欧拉角的顺序，可得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {}^{b}\mathbf{r} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{q}_e^b\right)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{e}\mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_e^b$$

$$= \left(\mathbf{q}_z(\psi)\otimes\mathbf{q}_y(\theta)\otimes\mathbf{q}_x(\phi)\right)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{e}\mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes \left(\mathbf{q}_z(\psi)\otimes\mathbf{q}_y(\theta)\otimes\mathbf{q}_x(\phi)\right)$$

$$= \left(\mathbf{q}_x(\phi)\right)^{-1} \otimes \left(\left(\mathbf{q}_y(\theta)\right)^{-1} \otimes \left(\left(\mathbf{q}_z(\psi)\right)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{b}\mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_z(\psi)\right) \otimes \mathbf{q}_y(\theta)\right) \otimes \mathbf{q}_x(\phi)$$

$$\mathbf{q}_\mathrm{e}^\mathrm{b} = \mathbf{q}_z(\psi)\otimes\mathbf{q}_y(\theta)\otimes\mathbf{q}_x(\phi)$$

$$\mathbf{q}_x(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2} & \sin\frac{\phi}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^\mathrm{T}$$

$$\mathbf{q}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & 0 & \sin\frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix}^\mathrm{T}$$

$$\mathbf{q}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\psi}{2} & 0 & 0 & \sin\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}^\mathrm{T}$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbf{q}_\mathrm{e}^\mathrm{b} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}$$

2. 姿态表示

◘ 四元数

（5）四元数与欧拉角转换

$$\mathbf{q}_e^b=\begin{bmatrix}\cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\\ \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}-\cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\\ \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\\ \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}-\sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\tan(\phi)=\frac{2(q_0q_1+q_2q_3)}{1-2\left(q_1^2+q_2^2\right)}$$

$$\sin(\theta)=2\left(q_0q_2-q_1q_3\right)$$

$$\tan(\psi)=\frac{2\left(q_0q_3+q_1q_2\right)}{1-2\left(q_2^2+q_3^2\right)}\Rightarrow$$

$$\phi=\arctan\frac{2(q_0q_1+q_2q_3)}{1-2\left(q_1^2+q_2^2\right)}$$

$$\theta=\arcsin\left(2\left(q_0q_2-q_1q_3\right)\right)$$

$$\psi=\arctan\left(\frac{2\left(q_0q_3+q_1q_2\right)}{1-2\left(q_2^2+q_3^2\right)}\right)$$

当 $\theta=\pm\pi/2$ 时，发生奇异，即

$$2\left(q_0q_2-q_1q_3\right)=1\,\|\,2\left(q_0q_2-q_1q_3\right)=-1$$

$$\mathbf{q}_e^b=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\psi}{2}\mp\frac{\phi}{2}\right)\\ \mp\sin\left(\frac{\psi}{2}\mp\frac{\phi}{2}\right)\\ \pm\cos\left(\frac{\psi}{2}\mp\frac{\phi}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\psi}{2}\mp\frac{\phi}{2}\right)\end{bmatrix}$$

无穷多种组合

在奇异情况下，人为设定 $\phi=0$

2. 姿态表示

四元数

（6）四元数变化率与机体角速度的关系

根据坐标旋转的复合四元数得

$$\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t+\Delta t)=\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)\otimes\underbrace{\Delta\mathbf{q}}_{\text{摄动}}$$

其中

$$\Delta\mathbf{q}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\underbrace{{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}}_{\text{机体角速度}}\Delta t\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

对$\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)$求解可得

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t+\Delta t)-\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)}{\Delta t}\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)\otimes\Delta\mathbf{q}-\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)}{\Delta t}\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)\otimes\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\Delta t\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}-\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)}{\Delta t}\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\mathbf{I}_3+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\Delta t\\ {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\Delta t & -\left[{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\Delta t\right]_{\times}\end{bmatrix}\right)\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)-\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)}{\Delta t}\\
&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\\ {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega} & -\left[{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right]_{\times}\end{bmatrix}\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)
\end{aligned}$$

2. 姿态表示

□ 四元数

（6）四元数变化率与机体角速度的关系

$$\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} q_0 & \mathbf{q}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \\ {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega} & -\left[{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right]_{\times} \end{bmatrix}\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t) \Rightarrow$$

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{q}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}} \cdot {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{v}} = \frac{1}{2}\left(q_0\mathbf{I}_3 + \left[\mathbf{q}_{\mathrm{v}}\right]_{\times}\right){}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}$$

在实际中 ${}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}$ 可由三轴陀螺仪近似可得，那么以上微分方程为**线性的！**

四元数与旋转矩阵转换，p30

$$\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}} = \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}):$$

3. 小结

- 欧拉角与机体角速度的关系

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{W}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}$$

奇异，非线性

- 旋转矩阵与机体角速度的关系

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\left[{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right]_{\times}$$

不奇异，维数高

- 四元数与机体角速度的关系

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \\ {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega} & -\left[{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right]_{\times} \end{bmatrix}\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)$$

不奇异，维数适中

多旋翼自驾仪基本用这种形式

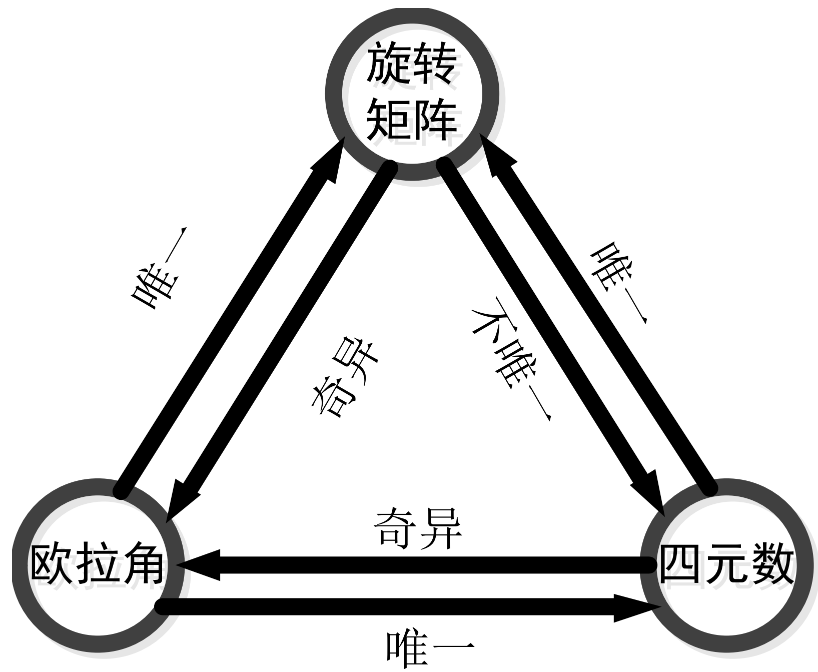


图. 三种旋转表示法之间的相互转换

4. 作业

选做一题

1. 将地球表面惯性坐标系转动到机体坐标系的欧拉角顺序改变为$\theta \rightarrow \psi \rightarrow \phi$（Y-Z-X），那么旋转矩阵的表示形式是什么？进一步什么时候会发生万向节死锁?

2. 在旋转矩阵与欧拉角转换和四元数与欧拉角转换的过程中，均出现了奇异情况。另外，arctan，arcsin的值域范围为$[-\pi/2, \pi/2]$，但是在大机动情况下$\theta \in [-\pi, \pi]$，因此需要对求解的结果进行角度扩展。请提供一个可以解决奇异问题和角度扩展问题的方法。（提示：奇异情况下，人为设定 $\phi = 0$）

资源

(1) 课程中心（课件、资料、作业等）

(2) 可靠飞行控制研究组主页(课件等)

http://rfly.buaa.edu.cn/resources/

(3) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(课件等)

谢谢！